哲学 38 号（2020） 【展望論文】

数学の両義性

有安和人

序

数学は新しい概念の導入によって進歩してきた。このとき、「導入」に対しては二つの立場がある。デデキントは、新しい概念は「発明」されるとする。ゲーデルは、概念は直観によって「発見」されるとする。本稿は、「発明」の立場を数学の歴史から根拠づけ、そのことによって数学の両義的性格を明らかにする。以下、次の順序で論ずる。⑴概念をめぐる二つの立場の説明。⑵数学における概念の「発明」の事例。⑶発明された概念は、既存の概念と関連づけられることで承認される。それは新しい関係性を発見することでもあり、概念は発明と発見の両義的性格を持つ。⑷概念の発明は純然たる創作ではなく、規範性を伴う。⑸発明された概念は、それを用いて様々に語られることによって、徐々に形成される。⑹新しい概念が徐々に形成されてゆく過程で、概念の対象も形成されてゆく。⑺概念の「発明」は「型破り」として誕生し、「型破り」は新しい知の形成として働く。即ち、概念の発明は破壊と形成という両義的性格を持つ。⑻数学の知は蓋然的真理であり、偽と真の両義的性格を持つ。

1. 概念の導入

1.1 二つの立場

> 数学や他の科学での最も大きく最も実りの多い進歩は主に、古い概念を用いただけでは解決が困難な複合的な現象が頻繁に現れ、新しい概念の創造（Schöpfung）が余儀なくされたところで、新しい概念を創造し導入することによってもたらされる。(Dedekind, 1888：Vortwort zur ersten Auflage,S.ⅵ；邦訳 50 頁）[1]

デデキント（Dedekind,1831-1916）が述べているように、数学の歴史においては確

[1] 訳は邦訳を一部改変している。

かに新しい概念の発明があり、それによって数学は進歩してきた[2]。例えば、「負数」や「虚数」といった数概念、射影幾何における「無限遠点」といった概念がそれである。こうして、リーマン（Riemann,1826-1866）以降、公理は仮説であるという思潮が生まれる。リーマンは「幾何学の基礎にある仮説について」という論文の中で次のように語っている。

> ここから、空間の計量関係を規定する最も単純な諸事実を探し出すという課題が生ずる。その課題は事態の本性上完全には決まらない。なぜなら、空間の計量関係を規定するのに十分であるような単純な事実は、複数の体系が可能であるからである。今の目的にとって最も重要な体系は、ユークリッドが基礎においたものである。ユークリッドが基礎においたものは、すべての事実と同様に必然的ではなく、単に経験的な確信である。即ち、仮説である。そこで、観察の範囲内では確かに大きいといえる仮説の蓋然性を研究することができるし、さらに観察の範囲を超えて、不可測の大きい方面にも小さい方面にも仮説の拡張の可能性を判断することもできる。（Riemann : S.273）[3]

リーマンがここで述べていることは以下である。3 次元の空間は複数可能であり、ユークリッド幾何はその一つの可能性にすぎない。経験（観測）では、どの可能性が正しいかは決まらない。だから、幾何の公理は仮説である。

リーマンは、以上の引用文の後、量を多様体（Mannigfaltigkeit）と呼び、多様体には連続多様体と離散多様体とがあること、日常生活では離散多様体を構成する概念が非常に多いこと、連続多様体を構成する概念は日常生活ではまれであることを述べ、連続多様体について、「これらの概念を作り出し発達させる機会は高等数学になって初めて頻繁に生ずる」（S.274）と述べている。

リーマンの影響から、デデキントやカントル（Cantor,1845-1918）らは概念的可能性を自由に追求することが数学の本質であるとみなす。ヒルベルト（Hilbert,1862-1943）も同様の立場をとる[4]。では、発明された概念の正当化はどのようになされる

---

[2] デデキントに関しては、Reck(2003)、Reck(2013)、Sieg and Schlimm(2005)、Klev(2015)を参考。デデキントは構造主義の先駆者と位置づけられたり、論理主義者と位置づけられたりする。しかし、概念の発明を認める点と、数を自由な創造物とみなす点とで、構造主義にも論理主義にも収まりきらないように思える。8.2 で考察するように、数学者の最大の関心は問題を発見・解決することにあり、数学とは多様な営みなのである。

[3] 訳は近藤（254-255 頁）の訳を改変したもの。以下のリーマンの引用も近藤を参考にしている。

[4] ヒルベルトは「数学の問題」において、新しい概念には新しい記号が必要なこと、諸

のか。それは、他の概念と矛盾しないことと、他の概念との関係を発見することである。カントルは次のことを語っている。

> 数学はその発達において完全に自由であり、自明性において制限されるのみである。その自明性とは次の二つについてである。数学の諸概念が互いに矛盾しないこと。以前に形成され既に証明された概念と新しい概念とが、定義によって順序づけられた明確な関係にあること。（Cantor,1883：S.182）[5]

ここで確認しておきたいのは、リーマン、デデキント、カントルといった数学者自身が「概念の発明」を表明していることである。リーマンは非ユークリッド幾何をつくり、デデキントとカントルは集合論をつくった。したがって、彼らは自分達がしていることが「概念の発明」であると自覚していたのである。しかも、その発明が「定型」に反する「型破り」であることも自覚していた（「型破り」については、6.1〜6.2で論ずる）。即ち、発明が一般的な直観や見解に反すること、誰も試みたことないものであることを自覚していた。

> これまでの私の多様体論の説明は或る到達点にあって、さらなる発展は、これまでの限界を超えて全実数概念を拡張することに依存している。私が知る限り、これは誰も試みたことのない方向への拡張である。（中略）。同時に隠さずに言えば、この企ては、数学的無限についての一般的な直観（Anschauungen）にも、数量の本質についての一般的な見解にも確実に反する。（Cantor,1883：S.165）[6]

さて、「概念の発明」という考えに反対する数学者も存在する。ゲーデルは、直観によって概念は把握されるとみなす。即ち、概念は「発明」されるのではなく、すべて「発見」されるものとする[7]。

概念が矛盾しなければ数学的に存在することを述べている（Hilbert，1900，pp.295, 300-301）。なお、デデキント・カントルへのリーマンの影響については Reck（2003）を参考。ヒルベルトについては Detlefsen（pp.291-295）を参考。

[5] 訳出は Ewald（Ⅱ：p.896）の英訳を参考にしている。以下の引用も同様。

[6] ここで「多様体論（Mannigfaltigkeitslehre）」とは「集合論」を意味し、カントルは初期の論文では「多様体論」と呼んでいた。ここに、リーマンの影響が見られることはいうまでもない。

[7] ゲーデルについては、Crocco、Lavers、戸田山を参考。なおゲーデルにおける「概念（concept）」という語には、Goldfarb が指摘しているように（Gödel,1995：pp.332-333）、対象との混同が散見される。

> 数学的命題で用いられる概念は、それら自身で客観的実在を形成している。それらを我々が創造することはできないし、変えることもできない。ただ知覚し記述することができるのみである。（1951：p.320）

ゲーデルは「概念の発明」という立場を批判し、次のような問題点を挙げている（1951：pp.313-315）。

① 概念を創造し、その理解が十分明白になったら（数学基礎論の研究によって、諸々の概念の理解は十分なものになっている）、それらの概念から生ずる数学の問題は解決されるはずである。しかし、現在も解決されない問題が存在する。このことは不合理である。
② 概念を自由に創造しても、そこから導かれる定理の妥当性については創造の自由がない。
③ 自然数も集合も創造物だとして、自然数の基礎づけに集合概念を用いるのは不合理である。

これら三つの問題点は、「概念の発明」の立場から答えることができる（8.1 で答える）。しかし、次の反論は有効である。

> もし、この経験的無矛盾性[これまでのところ矛盾が生じていないという無矛盾性]を用いるなら、数学的公理と数学的命題は「規約性」・「内容欠如」・「アプリオリ性」（注 7 の意味での）という性格を完全に失う。そして、数学的公理と数学的命題は経験的事実を表現していることになる。（1953／9：p.342）[8]

「概念の発明」の立場をとる数学者は、諸概念の無矛盾性を概念正当化の根拠とみなす。しかし、ゲーデルが批判しているように、「無矛盾性」に訴えることは数学の「確実」と「アプリオリ」という性格を失うことになる。その理由は次である。

---

[8] [ ]は筆者の付加。「注 7」とは、規約主義の立場を説明したもので、要約すると次である。数学の定理は構文論規則によって導かれる。数学的命題の妥当性は構文論規則によって決まるから、数学的命題は内容を欠くことになる。なお、ここでゲーデルが批判しているのは主にカルナップであり、カルナップは『言語の論理的構文論』の中で、「数学においては、言語は自由に構成可能で、無矛盾という制限だけがある」という内容を語っている。（Carnap：pp. xⅳ- xⅴ）

「無矛盾性」は、ゲーデルの第二不完全性定理によって証明できない。よって、あくまでも「これまでのところ矛盾が生じていない」というだけでしかない。したがって、「概念の発明」という立場をとるなら、「数学は蓋然的真理である」ということを認めなければならない。

以上のように、デデキントらとゲーデルは、概念をめぐって左右に分かれる。即ち、「発明」という立場と「発見」という立場とに分かれる。私は、「発明」の立場が正しいが、「数学は蓋然的真理である」という結論は受け入れるべきだと考える。ただし、ゲーデルとは異なった根拠で「数学は蓋然的真理である」と考える（7.1 で説明）。以下、「発明」の立場を数学の歴史から根拠づけ、その中で数学の両義的性格を明らかにする。

1.2　直観

「概念の発明」に関する議論の前に、直観について述べておきたい。古代ギリシア数学に証明概念が誕生して以来 17 世紀に至るまで、数学の公理は直観的に自明なものと考えられていた。例えばパスカルは、『幾何学的精神について』の中で、「公理においては完全に自明なものしか要請しないこと」（p.419）と述べている。しかし、18 世紀以降の数学は、直観が信頼できないということを明らかにした。その契機は二つあり、一つは非ユークリッド幾何の発明であり、もう一つは解析学における諸々の発見である。解析学における発見とは、一例を挙げれば、すべての点で微分可能でない連続関数の発見である[9]。ボルツァーノが最初にこのような連続関数を発見するまで、誰も連続関数の微分可能性を疑わなかった。

これらの事実は、ゲーデルの立場を支持できない理由の一つを構成する（もう一つの理由は、後述するように、新しい概念は時に 100 年以上も要して形成されるという歴史的事実である）。我々は直観というものを確かに使用するし、それで生活している。数学においても、出発点として直観は重要な役割を演じている。したがって、「直観」というものの存在は否定できない。しかし、18 世紀以降の数学の歴史が示したことは、直観を根拠にはできないということである[10]。

---

[9] ジャキント（9-10 頁）を参考。

[10] ハッキングの次の言葉も、直観を根拠にはできない理由の一つとなる（訳は邦訳を一部改変している）。「数学における直観は単に「持っていた」というものではない。それらは育成（cultivate）される。直観は数学の説明や教育の中で教えられる。」（p.253；邦訳 322 頁）

2.　概念の発明

数学者のヒューストン＝エドワーズは、次のことを語っている。

> 数学的陳述の真実性とは何かを 100 人の数学者に尋ねたら、100 通りの違う答えが返ってくるだろう。7 という数は、素数性を特徴の一つとして備えた抽象的な対象として実在しているのかもしれない。あるいは、それは数学者が考案した手の込んだゲームの一部である可能性もあるだろう。言い換えると、数学者はある陳述が真であるか偽であるかについて驚くべきレベルで一致している一方で、その陳述が厳密に何についての陳述であるかに関しては一致できないでいる。
>
> この議論は単純な哲学的疑問を含んでいる。数学は人間によって発見されたのか、それとも人間が発明・創作したものなのか、という疑問だ。7 という数は人間とは独立に存在する対象で、数学者はそれに関する事実を発見しているのだと考えられる。あるいはそうではなく、7 は想像の産物であり、その定義と特徴は変更が利くのかもしれない。数学という営みを実行すると、数学を発明でもあり発見でもあるとみる一種の二元的な哲学的視点が正解だと思えてくる。（35 頁）

ヒューストン＝エドワーズが問題にしているのは、「数学の対象は人間による発明なのか、或いはそれを人間は発見しているのか」という問題である。私が問題にしたいのは、存在論の問題ではなく、次のことである。数学においては概念の発明があり、その新しい概念は既存の概念と関連づけられることで承認される。既存の概念との出会いを発見することで、新しい概念は承認されてゆく。発明と発見という概念の両義性が本稿の主題である。

ここでは、まず発明を説明する。取り上げる事例は「虚数」である。概略を述べると、「虚数」は、計算の道具として導入された。道具として導入された事実は、この概念が発明であることの証左である。虚数は導入された当初、「数」としては承認されていなかった。虚数の「数」としての承認は、16〜19 世紀にわたって、ゆっくりと展開した。

虚数は方程式の解法において発明された[11]。カルダーノ（Cardano,1501-1576）は、「足して 10、掛けて 40 になるような二つの解を見つけよ」という問題で、標準的な 2 次方程式の公式を用いて、「$5 \pm \sqrt{-15}$」を解として導いた[12]。現代の 2 次方程式で表現すれば、「$x^2 - 10x + 40 = 0$」を解いて、解として「$5 \pm \sqrt{-15}$」を導いたということになる（カッツ：414 頁)。カルダーノは、虚数に関して加法と乗法の計算は行ったが、減法と除法については試みることはなかった。その理由は、式（1.1）〜（1.4）にあるように、加法と乗法では答えが整数になるが、減法と除法では答えが虚数を含むからである（Buehler：pp.4233-4236)。

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)=10 \tag{1.1}$$
$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\times\left(5-\sqrt{-15}\right)=25+15=40 \tag{1.2}$$
$$\left(5+\sqrt{-15}\right)-\left(5-\sqrt{-15}\right)=2\sqrt{-15} \tag{1.3}$$
$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\div\left(5-\sqrt{-15}\right)=\frac{5+\sqrt{-15}}{5-\sqrt{-15}} \tag{1.4}$$

虚数に関して加減乗除の計算を初めて行ったのは、ボンベッリ（Bombelli,1526-1572）であった。ボンベッリは、実数の演算規則からの類推で、虚数に関する加減乗除の演算を行った（カッツ：416 頁)。

カルダーノは、3 次方程式「 $x^3 + \mathrm{p}x + \mathrm{q} = 0$ 」の解を、

$$x=\sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2}+\sqrt{\frac{\mathrm{q}^2}{4}+\frac{\mathrm{p}^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{\mathrm{q}}{2}-\sqrt{\frac{\mathrm{q}^2}{4}+\frac{\mathrm{p}^3}{27}}} \tag{1.5}$$

と定式化していた。ボンベッリは、この定式に「$x^3 - 15x - 4 = 0$ 」を適用し、「 $x =$

[11]「虚数(imaginary number)」という用語は、デカルトが発明した。デカルトの次の言葉から導かれることは、虚数は計算の便宜から記号として使用されていたが、存在者としては認められていなかった、ということである。「即ち、各方程式には、私が述べただけの個数の根が常に想像されうる。しかし、想像される根に対応する量が全く存在しないことが時々ある。」(p.453；邦訳 59 頁)

[12] カルダーノの記号では、「$2+\sqrt{-1}$」は「2p：Rm：1」、「$2-\sqrt{-1}$」は「2m：Rm：1」と表記された（ボイヤー1：26 頁)。後に根号記号が普及するにつれ、「$2+\sqrt{-1}$」のように表記されるようになった。今日の記号では、「$2+i$」と表記され、実数と虚数からなる数を複素数と呼ぶ。

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 」となることを示した。ボンベッリは、「$(2\pm\sqrt{-1})^3=2\pm\sqrt{-1}$」より、「$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2\pm\sqrt{-1}$」となること、即ち「$\mathrm{x}^3-15\mathrm{x}-4=0$」の解が、「 $2\pm\sqrt{-1}$ 」となることを導き、二つの解の和が、「 $\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4$」となり、「$x^3-15x-4=0$」の実数解「$x=4$」となることを発見した[13]。

ボンベッリが虚数を認めたのも、カルダーノと同様、実用性である。ボンベッリが虚数解に言及したのは3次方程式で、それは虚数解を道具として利用すれば実数解が導かれるからである。「$x^3-15x-4=0$」は、「$(x-4)(x^2+4x+1)=0$」と因数分解され、3個の実数解「$x=4,-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}$」を持つ。虚数を利用すれば、「$x=4$」が導かれ、これを利用して因数分解を導くことが可能となり、最終的に3個の実数解を導くことができる。これに対し、4次方程式で実数解を含まないときは、ボンベッリは解を導かず（虚数を使えば解は導かれるのにもかかわらず）、「この事例を解くことはできない。なぜなら、それは不可能なことに関係するからである。」（Wagner：p.513）と述べている。つまり、方程式の解として虚数を認めず、計算の道具として虚数を利用しただけなのであった。

3. 発見

発明という第一段階を終えると、数学は「発見」という段階に移行する。この段階では、隠れた関係性が発見されたり、全く異なる数学分野との間に深遠な関係が発見されたりする。例えばオイラー（Euler,1707-1783）は、今日オイラーの公式と呼ばれる次の式で、三角関数と虚数との関係を明らかにした[14]。

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{2.1}$$

さらに、xにπを代入すれば、オイラーの等式として、次の美しい式が得られる[15]。

---

13 カルダーノとボンベッリについては、Buehler(pp.4232-4234)、示野(47-49 頁)、ボイヤー(3：28-29 頁)、カッツ（409-417 頁）を参考にしている。

14 「e」はネイピアの数、自然対数の底であり、次の数を指示する。$e=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$

15 オイラーの公式・等式に関しては示野(170-171 頁)を参照。

$$e^{i\pi} = -1 \tag{2.2}$$

対数の発明者はジョン・ネーピアである。ネーピアは、『素敵な対数表の解説』を書いたが、その英訳（エドワード・ライトが訳す）に「自然対数の底」という概念が最初に登場する（マオール：45 頁)。対数という概念は、計算の煩雑さを減らすために発明された（マオール：27 頁)。対数を最初に利用した一人がケプラーである。ケプラーは、惑星の軌道計算に対数を使った（マオール：35 頁)。

対数と虚数は、別々の道で発展した。これら二つの幸運な出会いは、オイラーの「遊び」で生まれた[16]。この幸運な出会いの物語、幸運な発見物語を説明しよう。

ニュートンは、式(2.3)のような、e^xのべき級数展開を発見した。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{2.3}$$

オイラーは、実験もしくは遊びで、式(2.3)のxにixを代入した。

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \tag{2.4}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{2.5}$$

オイラーは、式(2.5)の順序を変え、実数項と虚数項とを別々にまとめなおした。

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) \tag{2.6}$$

括弧の中の二つの級数が、それぞれ三角関数$\cos x$と$\sin x$のべき級数であることは、スコットランドの数学者グレゴリー（1638-1675）によって知られていた（式（2.7）と（2.8)）。

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{2.7}$$

---

16 以下マオール（276-281 頁）を参考。なお、自然対数の底、即ち数 2.71828…を表すのに記号「e」を用いたのはオイラーである（マオール：226-227 頁)。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \quad (2.8)$$

こうしてオイラーは、オイラーの公式に辿り着いた。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (2.9)$$

式（2.9）に $x = \pi$ を代入すると、

$$e^{i\pi} = -1 \quad (2.10)$$

式(2.10)となり、書き換えて式(2.11)にすると、数学の最も基本的な定数「$0, 1, e, \pi, i$」が関連づけられる。

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (2.11)$$

> これら五つの定数は、古典数学の四つの主な分野を象徴している。算術は 0 と 1 によって、代数学はiによって、幾何学はπによって、解析学はeによって、象徴される。（オマール：283 頁）

以上が「虚数と対数との出会い」という発見物語、或は「虚数を介した算術、代数学、幾何学、解析学の出会い」という発見物語であった。そして、このような発見を経てオイラーは、虚数は数だと明言する。

> これらの数(虚数)は、我々の想像の中に存在する。しかし、十分な観念を持っている。というのも、$\sqrt{-4}$ は 2 乗すると -4 になるのだから、$\sqrt{-4}$ は数であると知っているからである。(Euler：p.43)

対数や三角関数といった概念と虚数概念とが関連づけられることで、虚数概念は承認されるようになる。その理由は次の二つである。第一に、虚数概念が発明された当初、虚数に関する演算規則は実数の演算規則からの類推であった。この類推は、対数や三角関数と虚数との出会いで正当化される。第二に、対数や三角関数と

の結合によって、虚数という数の拡張によって矛盾が生じないことの確証が得られた[17]。よって、これらの出会いによって、虚数概念は承認されるようになった。

発明された概念は、既存の概念との出会いを発見することで正当化される。しかしそれは、概念の発明によって新しい関係性が生まれたということであり、新しい発見が生まれたということである。概念は発明と発見という両義的性格を持つ。

4. 発明と発見の相補性

概念の発明は純然たる創作ではない。数学の発明は、全くの自由ではなく、規範性を伴うのである。つまり、「発明」自体が両義的なのである。数学の発明は規範性という制約を受ける。以下、負数と虚数を例に挙げて説明しよう。

負数は発明である[18]。負数の乗法規則は以下である。

$$(-2)\times 3=-6 \tag{3.1}$$
$$(-2)\times(-3)=6 \tag{3.2}$$

なぜ正数と負数との積は負数となり、なぜ負数と負数との積は正数になるのだろうか。さらに、複素数の計算はどうであろうか。

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \tag{3.3}$$
$$(a+bi)(c+di)=\mathrm{ac}+\mathrm{ad}i+\mathrm{bc}i+\mathrm{bd}i^2$$

17 ここで「確証」という言葉を用いた理由は次である。前述したように、ゲーデルの第二不完全性定理によって、算術や解析学などの形式的体系に対して「無矛盾性」の証明はできない。したがって、既存の概念との結合が増すことで、蓋然性が増加するだけである。

18 負数の最古の記録は、中国で紀元前 200 年頃、インドで 7 世紀頃に存在する（ボイヤー2：114-115,143 頁）。ヨーロッパの最古の記録は、15 世紀にある(ボイヤー3：17-18 頁)。「+・－」の記号は最初、倉庫の荷の過不足を示すために使われていたものが、演算の足し算・引き算に使われるようになった。しかし、ヨーロッパにおいても、また中国やインドにおいても、負数は数としてなかなか認められなかった。例えば、16 世紀のほとんどの数学者は、方程式の解として、負数を認めなかった（カッツ：402 頁)。つまり、計算に役立つ限り、計算の途中で負数を認めるが、計算の結果である答えにおいて負数を認めなかった。即ち、道具として負数を利用するが、数として負数を認めなかった。

$$= (\mathrm{ac} - \mathrm{bd}) + (\mathrm{ad} + \mathrm{bd})i \qquad (3.4)$$

式（3.1）から（3.4）は、なぜこのように計算するのだろうか。答えは、図 3.1 にあるような、「交換法則・結合法則・分配法則」である（示野：28、58 頁）。

	加法	乗法
交換法則	a+b=b+a	ab=ba
結合法則	(a+b)+c=a+(b+c)	(ab)c=a(bc)
分配法則	a(b+c)=ab+ac	

図 3.1

「交換法則・結合法則・分配法則」という論理法則によって、加減乗除の演算規則が決まる。実数においても複素数においても、これらの論理法則に従って演算規則が決まる。

さて、負数も虚数も「発明」であった。しかし、全く自由な創作ではない。発明は論理法則の制約を受ける。例えば、小説であれば、論理法則の制約を受けない。虚構であるなら、自由に作ってよい。負数も虚数も発明として誕生したが、それらを使って文（数式）を作るとき論理法則の制約を受ける。なぜだろうか。それは、真理をめざすからである。「正しい推論に従う」という規範があるからである。真理をめざすから規範が存在する。

数学は一種のゲームである。規則に従って行為するという点ではゲームである。しかし、規則の設定は、或る程度の自由があるにしても、ほとんど自由がない。真理という規範が働くからである。概念の発明は、全くの自由ではなく、純然たる創作ではなく、規範性を伴うのである。即ち、発明は自由と規範という両義的性格を持つ。

前述したように、負数も虚数も道具として発明された。何の道具か。それは、方程式を解くための道具である。方程式の答えという真理を目的として、手段として負数と虚数は発明された。

「虚数と対数との出会い」という発見は、負数と虚数の発明がなければ存在しなかった。つまり、発明がなければ発見もなかった。しかし、概念の発明は最初から、また常に真理の発見をめざす。即ち、真理との出会いをめざす。発見と発明とは相補的なのである。

5. 概念と対象
5.1 対象の現出

虚数概念が発明された当初、数学者たちにとって虚数概念の外延は何かわからぬ「もの」であった。カルダーノは「$\sqrt{-9}$ は+3 でも－3 でもなく、深遠な第三種のものである」と述べ、虚数を「不可能な量」と呼び、虚数を用いて導かれた答えを「虚偽である解」と呼んでいた（Buehler：pp.4235-4236）。

虚数概念が発明されるとき、概念の対象はなく、概念だけがあったといえるかもしれない。カルダーノもボンベッリも、虚数を用いるとき、何について語っているか明確であったわけではない。このことは、18 世紀になっても観察される。ピーコック（Peacock, 1791-1858）は、代数を算術的（arithmetical）代数と記号的（symbolical）代数とに区別する。算術的代数は正の数と量を扱う（Ⅰ：p.1)。したがって、「$a-b$」は、「$a<b$」ならば算術的代数では不可能(解なし)となる（Ⅰ：p.7)。記号的代数は正と負の両方の記号を扱い(記号であって、数ではない)、計算規則は算術的代数の規則が拡張されたものとされる。ピーコックは、虚数の加減乗除の規則を説明し（Ⅱ：pp.74-76)、ド・モアブルの定理「$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$」も説明している（Ⅱ：pp.194-199)。ピーコックは、記号的代数の対象は記号かもしれないという。

> 量とその記号は、実在または可能的存在に対応することが示されうるとき、「実在する」または「可能である」といわれる。そうでなければ、「実在しない、不可能である、想像上(imaginary)のものである」といわれる。（Ⅱ：p.10)

> 記号的代数の結果は規約によってのみ存在するといわれるかもしれない。(Ⅱ：p.449)

以上から結論されることは、概念が発明されるとき、概念の外延はまだ不定の「もの」であるということである。不定の「もの」は、文の中で形が与えられ、構成され、やがて対象となる。「かたる」ことによって、不定の「もの」に形が与えられる。つまり、概念の発明と、概念を使用した文の構成とによって、即ち概念を用いて様々に語ることによって、新しい世界が現出する。

白川静によると、国語の「もの」とは、対義語の「こと」が異にして特殊であるのに対し、特殊を分化する以前の一般であるという（『字訓』723 頁)。古代において「もの」とは、霊物であり、「ものしり」とは霊界の消息に通ずるもの、「もののふ（物部)」とはもと邪霊を払うことを司る職業の意であったという（724 頁)。さ

らに「かたる（語る)」は、形を与えて構成することだという。そして「かた」は、「形」「語る」「騙る」と同根で、無いことを有るように仮構して、こしらえ作ることをいう（191 頁)。

「語る」ことで、不定の「もの」に形が与えられ、さらなる「語り」が可能となる。様々な人間が様々に語り合う、即ち異なる視点から様々な文（数式）を作ることによって、既存の概念、例えば対数や三角関数といった概念との結合が生まれ、新しい概念が人間と人間との間で共有されるにつれ、外延である「もの」も共有され、やがて人々の共通の目標ともなりうるような、人間と人間との間に「前に投げられてあるもの」、即ち「対象（objectum)」となる。様々な人間が様々に語り合うことで、不定の「もの」が他のものと明確に区別され、他のものと「こと（異)」とされ、そうして人々に共有される「こと（事)」となり、世界（可能世界であることも現実世界であることもある）の「こと（事)」、「対象」となる。

以上のことを論理学的に説明すれば、発明された概念で数学者たちが自由に数式を作り、それらの数式の真偽が確定すると数学者たちが認めた時、「対象」の誕生である。なぜなら、それらを量化子の変項の対象として認めていることになるからである。

さて、虚数の数としての承認は、ハミルトン（Hmilton,1805-1865）による代数的定義とガウスらによる図示とによって最終的になされたとされる（カッツ : 833 頁)。ハミルトンは、複素数「$\alpha + \beta i$」を実数の順序対(α, β)として定義し、この順序対の四則計算で複素数を構成した。表 4.1 にあるように、実数も複素数も、同じ順序対の四則計算で説明される[19]。したがって、実数を数として認めるなら、複素数も数として認めなければならないことになる。

実数の順序対	表記	意味
(a,0)	a	実数
(0,0)	0	ゼロ
(1,0)	1	単位元
(0,1)	i	虚数単位
(0,b)	bi	純虚数
(a,b)	a+bi	複素数

表 4.1

[19] カッツ（773-774 頁)、示野（112-117 頁）斎藤（93-95 頁）を参考。表 4.1 は、示野（116 頁）を参考。

ガウス（1777-1855）は図示によって、複素数の演算規則に意味を与えた。例えば、図 4.1 は加法の意味を与える[20]。おそらく、ハミルトンとガウスらによって、四則計算の意味が与えられたことで、数学者たちにとっては「虚数を用いた数式の真偽が確定する」という確信が与えられたのではないだろうか。したがって、19 世紀になって虚数の対象が与えられたといえるだろう。

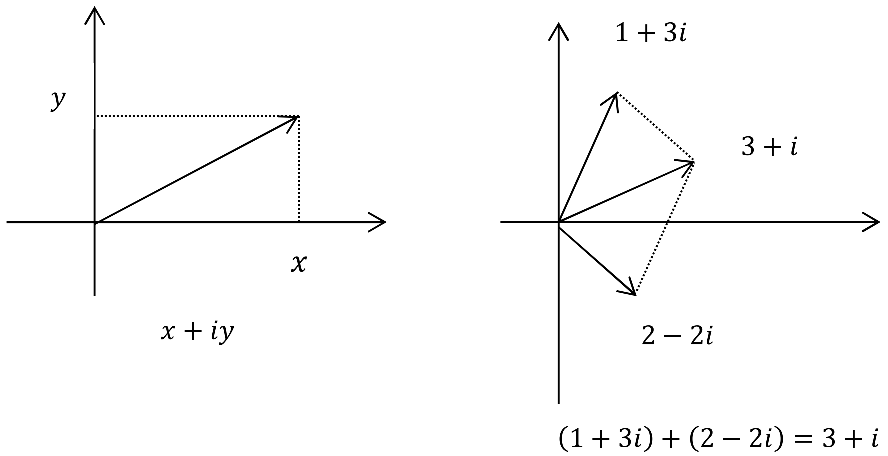

図 4.1　　$(1+3i)+(2-2i)=3+i$　の場合

また複素数の図示は、虚数を不定の「もの」から「対象」に格上げすることに役立ったと思われる。その理由は、次のような思想を当時の数学者たちに与えたと考えられるからである。2 次方程式を両軸が実数である座標面で考える限り、虚数は現れない。しかし、虚数軸を導入すれば、座標上に虚数解が現れる。たとえていうと、実数軸だけの世界で生きている限り、虚数は対象として現れない。しかし、もう一つ新しい次元として虚数軸を導入すれば、虚数が対象として現れる。このような思想を、複素数の図示は数学者たちに与えたのではないだろうか[21]。

[20] 図示は、示野（74-81 頁）を参考。なお、複素数の図示は、ガウスのほかにも、ノルウェーの測量技師ウェッセルによって 1797 年に、スイスの簿記係アルガンによって 1806 年に、イギリスの数学者ウォーレンによって 1827 年に、それぞれ与えられた。示野（110-111 頁）、カッツ（833-834 頁）を参考。
[21] 実際、複素数の積分を展開したコーシーは、n 次元空間での積分概念を展開する（カッツ：839 頁）。

ガウスは複素数の積分（複素関数論）を展開する。ガウスのあと、コーシー（Cauchy，1789-1857）は複素数変数の積分に関する基本定理（コーシーの積分定理）を証明する[22]。複素積分は今日、物理学の道具として不可欠である。偏微分方程式を解くための道具として不可欠である[23]。

以上のことをまとめよう。概念が発明され、様々な人が概念を用いて語り合う中で、概念は徐々に形成されてゆく。語り合いの中で、概念の外延も同時に徐々に形成されてゆき、何かわからぬ「もの」から「対象」になってゆく。概念が先に発明され、「対象」は後から与えられる。

5.2 概念

ここで、「概念」について定義しておきたい。以下の定義は、本稿の議論にはあまり影響しない。ではなぜここで定義を与えるかというと、概念を論じておきながら概念を定義しないことは、誠実な態度とは思えないからである。よって、この定義の根拠については軽く触れるにとどめる。

概念とは分節である。この定義の傍証は、概念の多くが対をなすことである。例えば「左右・上下・善悪」のように、概念が対をなすのは、何もないところに線を引いて分節するからである。概念は基本的に対をなして生まれる。対をなさない概念もある。それらは、既存の概念を合成し拡張してつくられる。

虚数概念の場合、既存の概念の合成と拡張から生まれたといえる。「$x^2 = 1$」の解は「± 1」である。「$x^2 = 2$」の解は「$\pm\sqrt{2}$」である。これら二つを合成して、即ち根号と負数とを合成して拡張し、「$x^2 = -1$」の解に「$\pm\sqrt{-1}$」という記号（語）を発明することが虚数概念の誕生であった。

カルダーノの時代は、「$x^2 = -1$」に対しては「解なし」で語りは終わっていた。これに対し、「$x^2 = -1$」の解に「$\pm\sqrt{-1}$」という記号（語）を発明した瞬間が虚数概念の誕生であった。カルダーノの例でいえば、「$x^2 - 10x + 40 = 0$」の解に「$5 \pm \sqrt{-15}$」と語った（書いた）瞬間が虚数概念の誕生であった。「解なし」で終わっていた何もない世界に、語を発明した瞬間に世界に差異が生まれ、世界が分節されたわけである。虚数の誕生物語は、「概念とは分節である」という概念定義への一つの確証を与える。以下は、「概念とは分節である」という立場をとる哲学者の言葉である。

---

[22] ボイヤー（5：14 頁）、カッツ（834-839 頁）を参考。
[23] 小野寺（1-5 頁）参考。

仏文・言語学者の丸山は次のように語っている。

> 我々はともすれば、言語以前に何かを分節肢として明確に認識して、それからその認識した対象に名前をつける、というふうに思いがちである。しかし幼児にとって＜対象物＞というものは、それが名前をもったときにはじめて知られ、＜存在する＞のである。そうしてみると、名というのはむしろ事物の本質であって、事物そのものが名とともにはじめて分節され、存在を開始すると言えないだろうか。命名とは、言葉による世界の一つの解釈であり、＜差異化 différenciation＞である。（93 頁）

> 言葉によって世界が分節され、事物が存在を開始する。（96 頁）

マクダウェルは、概念について次のことを語っている。

> 世界と自己とを見えるようにするのは、悟性の自発性、即ち概念思考の力である。概念能力を欠く生物は、自己意識も客観的実在という経験もないのである（自己意識も客観的実在経験の一部である）。(McDowell：p.114)[24]

マクダウェルが主張するように、概念よって世界が現出するなら、概念を発明するとは新しい世界を発見することを意味する。概念は、発明と発見の両義的性格を持つ。そして、この両義性とは、数学だけでなく、知すべてが持つ性質である。

パトナムは次のように語っている。

> 科学や道徳や法律において、「言語ゲーム」の本質的部分は新しい概念を発明し、それらを一般的に使用することである。その結果、新しい概念は新しい真理の定式化を可能にする。（Putnam，2002：p.109）

パトナムがいうように、確かに新しい概念は新しい真理の定式化を可能にする。例えば虚数概念の発明は、代数学の基本定理「すべての複素数係数の n 次方程式は重複を込めて n 個の複素数解を持つ」の定式化を可能にした。このことも、概念定義への傍証となる。

---

[24] 訳は邦訳（189 頁）を参考にして一部改変している。なお、「概念とは分節である」という考え方にはデイヴィドソンの批判（経験主義の第三のドグマ）がある。その批判にはマクダウェルの反論がある。McDowell（Lecture I，Afterword・Part I ）を参考。

6. 語りと型破り

概念は、語りの中で形成される。概念が発明され、その概念を用いた様々な語りが生まれることで、概念はより精緻なものになり、人々に共有されるようになり、人々の中で「定型」となってゆく。新しい概念の発明は、「定型」の破壊でもある。即ち「型破り」として生まれる[25]。「型破り」は、「破壊」としても「形成」としても働く。即ち、概念の発明は、破壊と形成という両義的性格を持つ。「型破り」は、何らかの発見から生まれることもあるし、概念の発明から生まれこともある。

概念が語りの中で形成されるという事実は、前述したゲーデルの立場への反例となる。即ち、概念が直観で「発見」されるならば、次の事実が説明できないからである。数学史においては、概念形成に 100 年以上、場合によっては 1000 年以上も要することがある。この事実を「直観による発見」という立場では説明できない。以下、数の歴史において説明しよう。

6.1 無理数

ギリシア語の「arithmos」は元々2 以上の自然数を意味し、古代ギリシア数学において数とは整数を意味した[26]。ピュタゴラス学派の標語は「万物は数である」だったといわれる（ボイヤー1 : 69 頁）。ピュタゴラス学派にとって数は、単に個数や量を表すための道具ではなく、自然界に発見されるべきものであり、万物の形成因子であった（リヴィオ : 36-37 頁）。即ち、「世界は整数の比で説明できる」というのがピュタゴラス学派の基本的教義であり、ピュタゴラス学派によって発明された数の概念であった（おそらくピュタゴラスの発明であろう）。このような数概念は無理数（通約不能量）の発見によって打ち砕かれた。正方形の対角線とその 1 辺との比は、「$\sqrt{2}$: 1」になる。対角線と辺とは「通約不能」であった[27]。

「通約不能量」の発見は、ピュタゴラス学派の数概念に対する「型破り」であった。万物は整数の比で表現されるという数概念に対する「型破り」であった。この「型破り」に対するギリシア数学の答えは、数と連続量との二分であった。「$\sqrt{2}$」のような

[25] 「型破り」という概念については、木岡（58-59、85-87 頁）を参考にした。
[26] ボイヤー（1 : 74 頁）、伊東（136-137 頁）を参考。
[27] ボイヤー（1 : 101-104 頁）を参考。

「通約不能量」は「連続量」に分類され、数とは区別された。つまり、無理数を数とは認めなかった。

以上のように、「通約不能量」の発見は、「万物は数なり」という古代ギリシア数学の「定型」であった数概念の一部修正へとつながった（「万物は整数の比では表現できない」ことと「数と量の二分」という修正）。つまり、「通約不能量」の発見は、「型破り」として破壊と形成という両義的性格を持っていた。

「数を整数の比で表現されるものに限定する」という数概念は 16 世紀まで続いていた。この「定型」に対し、負数と虚数の発明は「破壊」であり、「型破り」であった。負数概念と虚数概念の発明は、古代ギリシア以来の数概念の「型破り」として生まれた。16 世紀において、方程式「$x^2 = -1$」に対しては「解なし」で語りを終えるのが「定型」であった。虚数という新しい概念の発明は、この「定型」を破壊する「型破り」として誕生した。しかし、負数と虚数は、無理数の数としての承認に寄与した。虚数は当初、「$\sqrt{-1}$」や「$\sqrt{-2}$」のように、負数記号と根号記号との合成で表記された。よって、虚数を数として承認することは、負数と無理数とを同時に数として承認することを意味する。また、負数と無理数とを数として承認すれば、虚数の数としての承認に抵抗がなくなる。したがって、無理数の数としての承認は、負数概念・虚数概念と結合することで、16 世紀から 17 世紀にかけて行われたと考えるべきであろう。つまり、負数と虚数は、「破壊」であるとともに「形成」でもあった。

負数概念・虚数概念は、それらを用いた様々な語り（数式の展開）の中で既存の概念（無理量を含む）と結合し、やがて「定型」となる。さらに、新しい概念（集合や極限など）と結合することで、実数概念と複素数概念の構成要素となり、数概念は拡張された。即ち、「型破り」としての負数概念・虚数概念は、「破壊」として生まれ、自らが「定型」となる過程で、新しい数概念（実数・複素数）の形成として働いた。

6.2 集合論

集合論は、カントルやデデキントによって、集合概念を数の基礎づけに使用したことから生まれた。カントルもデデキントも、集合を厳密に定義したわけではなかった。カントルが与えた定義は次である。

集合とは、直観または思惟の対象で、明確に十分に区別される対象 m を一つの全体に

まとめたもの M のことである。（Cantor,1895：S.282）[28]

この定義では、次のラッセルのパラドクス（1903 年）が生じる[29]。

自身を要素としない集合をすべて集めてきて集合 R とする。このとき、R が R に属しているとしても、属していないとしてもどちらも矛盾になる。実際、属していれば R は自身を要素とするので定義から R に属さない。属していなければ、R は R に属している。（寺澤：11 頁）

ラッセルのパラドクスから得られた教訓は、「ものを集めてそれで集合というわけではない」ということである。カントルの集合論は素朴集合論（naïve set theory）と呼ばれる。今日の集合論は公理的集合論と呼ばれる。即ち、ツェルメロ（Zermelo,1871-1953）が第一案を作りフレンケル(Fraenkel,1891-1965)によって改良されたツェルメロ・フレンケルの公理系（ZF）を満たすものを集合とする[30]。

ラッセルのパラドクスは、アリストテレス以来の伝統論理学の「定型」を破壊するものであった。即ち、「概念に対し、それを充足する対象の集まりが存在する」とする「内包原理（principle of comprehension）」を破壊するものであった[31]。ツェルメロは、パラドクスの原因が内包原理にあることを見抜き、集合概念の修正が必要である

[28] 訳は、邦訳（1 頁）と田中・鈴木（137 頁）とを参考にした。

[29] ラッセルは、カントルの対角線論法やブラリーフォルティ（Burali-Forti）のパラドクス（1879 年）を参考にして、パラドクスを発明した（Kanamori：p.410）。ラッセルはフレーゲやペアノに影響されて、数学を論理学によって基礎づけようとした（論理主義）。ラッセルのパラドクスは、論理主義という「定型」への「型破り」であるとともに、素朴集合論への「型破り」であった。

[30] ZF 集合論とは、次の一連の公理からなる体系である。①外延性公理「2 つの集合の要素が全く同じであるとき、それら 2 つの集合は等しい。」②分出公理「任意の集合 a,p に対し、a の要素 x のうち条件 F(x,p)を満たすもの全体の集合が存在する。」③対公理「任意の集合 a,b に対し、a と b のみを要素とする集合{a,b}が存在する。」④和集合公理「任意の集合 a に対し、a の要素の要素全体からなる集合∪a が存在する。」⑤ベキ集合公理「任意の集合 a に対し、a の部分集合全体からなる集合 P(a)が存在する。」⑥無限公理「次の 2 条件を満たす集合 z が存在する。⑴空集合は z の要素である。⑵任意の対象 x に対して、x が z の要素ならば{x}も z の要素である。」⑦置換公理「集合 a の各々の要素 x ごとに、一つずつ集合 y=F(x)を対応させる規則 F が与えられとき、a のあらゆる要素 x に対する F(x)全体の集合が存在する。」⑧正則性公理「空でないどの集合 a にも、a と共通元をもたない元 y がある。」ZF 集合論に関しては、田中・鈴木（139-140 頁）、斎藤（194-204 頁）、ジャキント（141-145 頁）を参考。

[31] Ferrreirós（p.52）を参考。

と考えた[32]。

> 「自分自身を要素として含まないような集合の全体からなる集合」に関する「ラッセルの逆理」により、今日では任意の論理的に定義可能な概念に対し「集合」あるいは「クラス」をその概念の「外延」として対応させる事が、もはや許容されないように思える。この元々カントルによる「集合」の「ある明確に区別できる我々の直観あるいは思惟の対象の全体の統合」としての定義は、これを同じように明快な、このような疑念の生じる心配のない別の定義で置き換える事ができる、という事でもなければ、いずれにしても、ある制限が必要である。（ツェルメロ：139-141 頁）

カントルやデデキントによる集合論の発明は、ラッセルのパラドクスという「型破り」を誕生させ、アリストテレス以来の伝統論理学の「定型」であった「内包原理」を破壊した[33]。内包原理においては、実は概念と集合が結合していた。即ち、概念の意味規定があれば、その概念の外延として集合を対応させることができると想定していた。つまり、集合論の発明は、当時の「概念」の概念（内包原理）を破壊する「型破り（ラッセルのパラドクス）」を誕生させ、この「型破り」は集合概念自体を修正し、公理的集合論の形成へとつながった。

集合論の発明は、「定型」であった数概念や内包原理を破壊し、自らの集合概念（素朴集合概念）をも解体し、公理論的集合概念の形成として働いたのであった[34]。

7. 数学という知

7.1 蓋然的真理としての数学

先に引用したツェルメロの文には続きがある。

> このような状況下では、現在のところ、逆の道を辿って、歴史的に既に成立している「集

32 パラドクス・内包原理・ツェルメロに関しては、Ferrreirós（pp.321-322）を参考。

33 集合論の発明は、正確にはリーマンに帰すべきかもしれない。Ferrreirós（pp.39-40）を参考。

34 集合概念が既存の数概念を破壊したとは、例えば次の二つである。自然数全体の集合と有理数全体との濃度が等しいことの証明。「π」や「e」といった無理数の一部である超越数（transcendental number）が実数全体の濃度と同じ個数であることの証明。寺澤（50-51 頁）を参考。

合論」から出発して、この数学の学問領域で不可欠となっている原理を見出す、という事以外に手立てはなさそうである。この課題は、全ての矛盾が除外されるのに十分なほどに原理を狭く制限し、しかし同時に、この学問ですべての価値あるものを保存するのに十分なほどに制約をゆるめることで達成されるしかない。（141 頁）

ツェルメロのいっていることは、集合論の公理とは「仮説」であるということである。既に成立している集合論に必要な原理を矛盾が生じないように設定するということである。したがって、マディイの次の言葉は正鵠を射ている。

なぜ我々は公理を信じるのか。答えは通常、それらは明らかであるとか自明であるとか、或はそれらを否定すると自己矛盾になるとか知性に対する犯罪であるとかであろう。（中略）。集合論の公理化は次の考察を導いた。即ち、公理の候補は明白ではないし、頑強な支えも存在しない。ここで見いだされるのは、仮説を形成しテストするという自然科学の方法論と共通な方法論である。少数の明白な原理を書き留め、そして論理的帰結を導くという数学者の風刺画は見られないのである。（Maddy：p.481）

シャピロも次のことを語っている。

ほとんどすべての専門学科において不確実性を受け入れることを我々が学んだように、数学の基礎と論理学においても不確実性を受け入れることはできるし、うまくやっていくことができる。（中略）。活動している数学者も論理学者も、仕事のために確実な基礎を必要とはしない。岩盤に基礎がないことがわかったとしても、数学という建造物は倒壊することはない。建造物はそのままで十分安全である。少なくともほとんどの場合は。（Shapiro,1991：pp.25-26）

現代の数学は集合論に基づく。「集合論の上に全数学が築かれることは常識である」（斎藤：v 頁）。数学の公理が「仮説」であるなら、数学の諸定理のほとんどは経験科学と同様、蓋然的真理でしかない。つまり、数学は偽と真との両義的性格を持つ。数学の知は、他の知と同様、蓋然的でしかない。

さらに、厳密な意味での演繹的正当化はほとんど存在せず、正当化はほとんどすべて非演繹的なものでしかないということである。公理が仮設されれば、公理から定理は純粋に演繹的に導出される。つまり、集合論の上に築かれる数学は演繹的に証明される。しかし、その基礎にある集合論の公理は、非演繹的に正当化されるだけである

[35]。

以上のことは、「概念の発明」ということからも裏付けられる。先に引用したリーマンの論文は「幾何学の基礎にある仮説について」であった。概念が発明されるものである以上、その概念を用いて公理を設定すれば、公理は仮説であり、導かれた定理は蓋然的真理でしかない。

「数学の知が経験科学と同様に蓋然的真理である」ことは、クワインの「経験主義の二つのドグマ」によっても明らかになっている。クワインによれば、伝統的な「分析的／総合的」の二分法は成立せず、数学の知と経験科学の知との間には明確な境界は存在しない[36]。「科学全体は、自然・社会・人文の諸科学をすべて含めて一つの「知識のネットワーク」を形成している」（野家：239 頁）のである。

7.2 数学の確実性

数学と経験科学とは知のネットワークを構成する。したがって、数学に対する立場と経験科学に対する立場とは連動することになる。例えば、数学に対し反実在論をとり、経験科学に対し実在論をとることは、二重基準を採用することになる[37]。

さて、経験科学、とりわけ物理学は、法則の導出など理論形成の過程で多くの数学的対象を語り、多くの数学の定理を前提にする。つまり、用いられる数学が真であることを前提せずには経験科学を行うことはできない。したがって、経験科学という行為を認めるなら、数学が真（もしくは蓋然的真理）であると認めていることになる。というのは、理論形成において P（数学の定理）を用いて、P を信じていないというのは、誠実条件に反するからである[38]。

数学は経験科学と同様、蓋然的真理である。この蓋然的真理とは道徳的確実性（moral certainty）を持つ。「moral certainty（certa moraliter）」とはデカルトの用語であり（『哲学原理』Ⅳ・205）、「実践的確実性」と訳されるが、私は「道徳的確実性」と呼びたい。その理由は以下である。

数学や経験科学、さらには哲学や経済学など、すべての学問的知はネットワークをなし、その知全体に我々の生命は依存している。少なくとも経験科学には、我々の生

---

35 数学の公理一般についての議論は、Schlimm を参考。

36 クワインに関しては Resnik（2005）を参考。

37 クワインは、このような二重基準を批判している（1951：p.45）。

38 ここでの議論は、Resnik（1995）のプラグマティク不可欠性論証を参考にし、そこに語用論的観点と実存的観点とを付加したものである。

命はかなり依存している。したがって経験科学は、生命を賭けるに値する確実性、「道徳的確実性」をもっているといえる。

例えば、生命に関わる病気になった時、誰もが病院に行き、治療を望むだろう。このとき、「医学は虚構にすぎない」という立場をとれるだろうか。医学は他の経験科学と同様、蓋然的真理である。しかし、我々の生命を賭けうるような「道徳的確実性」を持つ。数学と経験科学は知のネットワークをなし、その中心部分に数学は位置する。したがって、数学は道徳的確実性を持つ。

すべての学問的知は、ネットワークをなしている。そして、その知の体系に我々の生命は依存している。したがって、すべての学問的知は真理を規範とし、その知の探求は道徳的行為である。ただし、すべての知は蓋然的真理であり、その蓋然性には程度の差が存在する。また、ネットワークの中心部分に数学は位置するが、将来改訂される可能性は常にある。実際、数学史においては、それまでほとんどの数学者が疑わなかったことが修正されるということは起こっている。しかし、改訂される可能性があるとしても、数学は道徳的確実性を持つのである。

8. 結語

8.1 まとめ

数学においては概念の発明がある。発明された概念は、既存の概念と関連づけられることで正当化される。既存の概念との出会いを発見することで正当化される。既存の概念との出会いを発見するとは、既存の概念と発明された概念との新しい関係を発見することでもある。つまり、概念は「発明と発見」という両義的性格を持つ。

発明された概念は、それを用いて様々に語られることによって、徐々に形成されてゆく。この事実と、18 世紀以降における直観の権威失墜とによって、「概念は直観によって発見される」というゲーデルの立場は支持できない。

概念の発明は「型破り」として誕生し、「型破り」は新しい知の形成として働く。概念の発明は以前の定型を破壊し、新しい知の形成として働く。即ち、概念の発明は「破壊と形成」という両義的性格を持つ。

「破壊」というとき、すべてを破壊するわけではない。破壊される古い概念も、新しい概念も、同じ論理法則によって語られる。概念の発明は全く自由な創作ではない。発明には真理という規範が働き、論理法則の制約を受ける。概念の発明は「自由と規範」という両義的性格を持つ。そして、古い概念も新しい概念も、同じ言語ゲーム内の出来事である。そうでなければ、我々は古い概念と新しい概念とを同時に語ること

ができない。

数学においては概念の発明がある。発明された概念の正当化は、他の概念との結合によってなされる。これら二つの事実から、数学の知は蓋然的真理であるということが導かれる。さらに、集合論という現代数学の基礎が仮説であることからも、蓋然的真理であることは導かれる。つまり、数学の知は偽と真の両義的性格を持つ。

ここで、1.1 で説明したゲーデルの問題点①～③に答えたい。まず①である。数学は静的なものではなく、動的である。概念は徐々に形成される。概念は常に成長しうる。したがって、解けない問題が存在することは不合理ではない。概念が未熟だったということである。

次に②である。概念の発明には真理という規範が働き、論理法則の制約を受ける。したがって、定理の妥当性について創造する自由がないことは、不思議なことではない。

最後に③である。新しい概念で古い概念を説明することは不合理ではない。新しい概念が古い概念より、道具として優れていたということである。

8.2 教訓

最後に、以上の考察からの教訓を述べて締めくくりたい。

第一に、概念を発明することは新しい世界を発見することである。不備な概念であっても、出発点として発展を生むことがある。例えば、ピュタゴラス学派の「万物は数なり」というような数概念や、カントルの素朴な集合概念がそれである。

第二に、概念は語り合いの中で形成されてゆく。したがって、知の探求には、自由で対等な語り合いの場が不可欠である。

第三に、科学のみならず、多くの知の探求において重要な仕事の一つは、新しい概念を発明し、新しい語り、新しい物語を紡ぐことである。新しい概念を発明し、何かわからぬ「もの」を語る、即ち新しい物語を紡ぐことは、重要な仕事の一つである。「定型」に安住することなく、また「型破り」を恐れることなく、新しい物語を紡ぐことは、重要な仕事である。その成果と評価は、100 年ほど経過しないとわからない。

第四と第五は残された課題である。第四は、概念の問題である。以下は推測である。すべての概念が一から発明されるわけではない。5.2 で「概念とは分節である」と定義した。「分節」という場合、「身体による分節（身分け）」と「言葉による分節（言分

け)」とがある[39]。概念は、「身分け」の上に「言分け」が重なってできる場合と、「言分け」によって生まれる場合とがある。例えば、幾何学の「点・線・平面」といった概念は、おそらく図形を描くという身体行為に言分けが重なって生まれたのであろう。即ち、図形を描く身体行為において分節が素描され、その素描をなぞるように言分けが生まれて概念になったのであろう。その根拠は、ピュタゴラス以前の数学においては、点は大きさを持ち、線は幅を持っていたことである。このことは、無理数の発見という事実から裏付けられるし、ゼノンの「アキレスとカメのパラドクス」が生まれた事実からも裏付けられる。このようなパラドクスを解決するために、ユークリッド『原論』に見られる「点」の定義「点とは部分のないものである」や「線」の定義「線とは幅のない長さである」が生まれた。『原論』の「点・線・平面」概念は理想化から生まれたもので、「身分け」に「言分け」が重なり、さらに理想化という推論が加わった概念といえる。つまり、経験に基づいた概念に理想化という操作が加わって生まれた概念といえる。したがって、数学とは「雑多な寄せ集め」なのである。「言分け」から生まれた概念だけではなく、「身分け」を出自とする概念や推論によって構成された概念をも含むのである。

第五は、数学の対象という問題である。数学においては、対象が語られる。例えば「5 は奇数である」という文の場合、標準的な意味論的説明では、「5」という単称語は何らかの対象を指示し、対象が語られていることになる。しかし、数学における単称語が何らかの対象を指示しているとは証明できない。即ち、整数の「2」や「3」という単称語が何らかの対象を指示しているとは証明できない。その論拠は二つあって、一つは指示的不確定に対する置換論証で、もう一つは意味論的無為（idleness）である。置換論証とは、数学的理論のモデルには同型モデルが複数あって、それぞれのモデルで指示対象が異なりうるというものである。意味論的無為とは、単称語を含む文の真理値は、その単称語の指示対象を同定することなく決定可能であるというものである[40]。

5.1 で、概念が先に発明され、対象は後から与えられると述べた。不定の「もの」が対象となるためには、不定の「もの」の名前（新しい単称語）を含んだ文の真偽が確定するという確証が得られれば十分であった。すると数学の文は、文中の単称語の指示対象を同定することなく、真偽が決定可能であるように見える。

例えば、文（8.1）においては、単称語「ニューヨーク」の指示対象を問うことは有意味である。単称語「ニューヨーク」の指示対象が存在しなければ、文（8.1）は

39 「身分け」については、市川（138-181 頁）参考。
40 二つの論証については、Assadin を参考。

真偽を持たない空虚な文である。しかし、文（8.2）においては、単称語「5」の指示対象を問うことなく、文の真偽は確定するように見える。

ニューヨークよりも古い大都市が少なくとも三つ存在する。　(8.1)
5 より大きい素数が少なくとも三つ存在する。　(8.2)

（8.1）と（8.2）とは、ベナセラフの例文（Benacerraf， 1973：p.105；邦訳 247 頁）を改変したものである。ベナセラフは、(8.1）と（8.2）とが同じ標準的意味論で分析されるべきならば、数学の文についての意味論と数学的真理の認識論（空時間内で数学的対象と人間との間に因果関係が必要）との間でジレンマに陥ると主張した。しかし、数学の言語行為においては、単称語の指示対象を同定することが問いにならないように見える。

例えば、クロネッカー（Kronecker，1823-1891）にとっては、「神御自身が整数を作られた。それ以外はすべて人間の仕事である」（カッツ：765 頁）。デデキントにとっては、数はすべて人間の知性による自由な創造物である（1888，Vortwort zur ersten Auflage：S.ⅲ）。ヒルベルトにとっては、数論の対象は記号である[41]。今、私の目の前で三人が素数に関する問題を論じ合っているとしよう。私にとっても、また当事者である三人にとっても、三人のしていることは同じであり（三人の数学行為は同じであり）、三人の対話は成立しているであろうし、三人の答えは同じであろう。

さて、三人の答えが同じになるのはなぜだろう。或いは、文（8.2）の真偽が確定するのはなぜだろう。それは、素数の概念・整数の概念・整数に関する演算規則などによって、文の真偽が確定するからである。7 は 5 より大きい素数であり、5 の次に大きい素数である。それは、整数の中での 7 の役割によって確定する。7 を他の整数によって置換することは不可能である。それは、各数の整数の中での役割によって不可能である。対象には確定した役割があり、その役割によってのみ対象は同定される。したがって、数学的対象の認識には対象の役割の認識だけが必要であっ

[41] ヒルベルトは「数学の新しい基礎」において、次のことを語っている。「私の立場はフレーゲやデデキントとはまさしく反対であって、数論の対象は記号そのものである。（中略）。これらの数記号が数であり、数を完全に構成しており、我々の考察の対象そのものであり、それ以外ではいかなる「意味（Bedeutung）」も持たない。」（1922：S.163）訳出は Ewald（Ⅱ：pp.1121-1122）の英訳を参考にした。また、ヒルベルトはフレーゲへの手紙の中で、次の内容を語っている。「点・直線・平面」の代わりに「愛・法律・煙突」でもピュタゴラスの定理などの定理は成立する。公理が無矛盾なら、公理は真であり、公理によって定義される対象は存在する。Shapiro（2005a）を参考。

て、空時間内で対象と人間との間に因果関係が存在する必要はない。よって、ベナセラフのジレンマは成立しない。また、数学的対象の役割は、我々が住むこの地上に存在する。したがって、数学的対象を考えるために、イデア的世界も第三の世界も想定する必要はない。

「数学の文は、文中の単称語の指示対象を同定することなく、真偽が決定可能であるように見える」と前述した。「同定していないように見える」だけであって、対象の役割は同定しており、その限りにおいて文の真偽は確定する。しかしそれでも、数は複数の仕方で構成可能であるという問題は残る。例えば実数は、デデキントの切断・カントルの基本列・無限小数などによって定義できる（田中・鈴木：85-95 頁）。この点で、「数は対象では全くない。なぜなら、数の（必要十分な）性質を与えるとき、単に「抽象的構造」を特徴づけているだけだからである。」（Benacerraf，1965：p.291）というベナセラフの主張（構造主義）はもっともらしく見える[42]。しかし、構造を語るためには、"2"や"3"といった対象を語らねばならない。語る限りは、対象という存在を認めねばならない。

数学者にとっての最大の関心は、問題を解決すること、問題に決着をつけること、或いは問題を発見することにある。例えば本稿の冒頭で言及したカントルも、概念を発明する理由は問題の解決にあった。実はこの点で、ゲーデルも合致していた。ゲーデルは、連続体仮説（自然数全体の集合と実数全体の集合との中間の基数を持つ集合は存在しない）と ZFC（ツェルメロ・フレンケル公理系に選択公理を付加したもの）とが独立（連続体仮説は ZFC において証明も反証もできない）であることから、ZFC は実在の完全な記述を与えていないと考えた。そして、連続体仮説の真偽を決定するために、新しい公理（ZFC の拡張）が必要であるとし、その新しい公理の真偽は公理の成果（fruitfulness）によって判定されると考えていた（Gödel，1964：pp.260-261）[43]。そしてさらに、そのことによって数学が蓋然的真理になることも認めていた（pp.261,269）。

[42] 構造主義においては、対象の存在を認める立場と認めない立場とがある。構造主義については、（Shapiro,2000：ch.10）を参考。

[43] ゲーデル（1964）に関しては、Shapiro（2000：pp.208-211）を参考。なお、ゲーデルの次の言葉に見られるように、この「成果による正当化」という方法にはゲーデル自身ためらいがあった。「数学的公理には、数学的直観以外にも別の真理基準（蓋然的でしかない）が存在する。即ち、数学における公理の成果であり、おそらく物理学における成果も付け加えてよいかもしれない。この基準は将来決定的なものになるかもしれないが、とりわけ集合論の公理（例えば巨大基数に言及するもの）に適用することは現状できない。なぜなら、他の分野における帰結については、ほとんど何も知られていないからである。」（p.269；邦訳 38 頁）（訳は邦訳を一部改変している）

数学者にとって最大の関心は問題を発見・解決することにあり、数学の文について真偽が確定すれば十分なのである。そのために数学者は柔軟に対応する[44]。数学の言語行為にとって、数学的対象はあまり問題にはならないのであり、そのことが数学的対象を両義的なものにしているといえるかもしれない。

文献

Assadian,B. 2019. Abstractionism and mathematical singular reference, *Philosophia Mathematica*,27,177-198

ボイヤー,C.B. 1983-4『数学の歴史　1-5』加賀美鐵雄・浦野由有訳、朝倉書店

Benacerraf,P.1965. What numbers could not be, *Philosophical Review*,vol.74. References to [Benacerraf and Putnam,1983²],272-294.

Benacerraf,P.1973. Mathematical truth, *Journal of Philosophy*,vol.70. References to [Benacerraf and Putnam,1983²],403-420.／ベナセラフ，P.「数学的真理」飯田隆訳、[飯田隆（編），1995]所収、245-272

Benacerraf,P. Putnam,H. eds.,1983². *Philosophy of Mathematics : selected readings*. Cambridge（Cambridge University Press）

Buehler,D. 2014. Incomplete understanding of complex numbers Girolamo Cardano: a case study in the acquisition of mathematical concepts, *Synthese*, 191,4231-4252.

Cantor,G. 1883. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig. References to [Cantor,1932],165-209

[44] ヒルベルトは「数学の問題」において、次の内容を語っている。数学の初期の問題は経験から生まれたものとし、その事例として、整数の演算規則・円積問題（「与えられた円と等積の正方形を作れ」という作図不能問題）などの幾何の問題・方程式の解法・微積分などを挙げている。そして、19 世紀以降は経験を源泉とするのではなく、論理的組み合わせ・一般化・特殊化・概念の分離結合によって、新しい問題を数学者自身が創造するようになったとする（1900：S.292-293）。このヒルベルトの言葉からいえることは次の四点である。①数学とは多様な活動である。②数学には経験に基づいた概念も含まれる。③数学は経験から得られた対象も問題にする。④代数学や集合論における数学的対象と、初等教育で学習するような初等幾何における数学的対象とを、同列で論ずることはできない。この点で、構造主義には無理がある。構造主義は、代数学や集合論には適合するが、初等幾何にはあまり適合しない。

Cantor,G. 1895/97. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*,46,481-512,49,207-46, References to [Cantor,1932], 282-351／カントル『超限集合論』功力金二郎・村田全訳、共立出版（1979）

Cantor,G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* E.Zermelo,ed., Berlin(Springer). Reprint Berlin・Heidelberg・New York (Springer-Verlag),1980

Carnap R. 1937. *The Logocal Syntax of Language*, tr.A.Smeaton, London (Routlege)

Crocco,G. 2003. Gödel,Carnap and the Fregean heritage, *Synthese,*137,21-41

Dedekind,R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig（Vieweg）. References to [Dedkind,2017]／デデキント,R.『数とは何かそして何であるべきか』渕野昌訳、岩波文庫（2013）

Dedekind,R. 2017. *Was sind und was sollen die Zahlen?　Stetigkeitweig und Irrationale Zahlen*. S.Müller-Stach Hrsg., Berlin(Springer-Verlag)

Descartes,R. 1637. *La Géométrie*. in C.Adam,P.Tannery,publiées, *Œuvres de Descartes Ⅵ,*Paris（Vrin）,1965／『幾何学』原亨吉訳、『デカルト著作集Ⅰ』白水社 1973、1-121

Detlefsen,M. 2005. Formalism, in [Shapiro,2005b],236-317

Euler,L. 1770. *Vollständige Anleitung zur Algebra* / *Elements of Algebra*, tr. J.Hewlett, New York (Springer-Verlag,1984)

Ewald,W.B. 1996. *From Kant to Hilbert : A source book in the foundations of mathematics*,2vol., Oxford（Oxford University Press）

Ferreirós,J. 1999. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Basel・Boston・Berlin（Birkhäuser Verlag）

Gödel,K. 1951. Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications, References to [Gödel,1995],304-323

Gödel,K. 1953/9. Is mathematics syntax of language? References to [Gödel,1995], 334-362

Gödel,K.1964. What is Cantor's Continuum problem? References to [Gödel,1990], 176-187／ゲーデル，K.「カントールの連続体問題とは何か」岡本賢吾訳、[飯田隆（編），1995]所収、17-55

Gödel,K.1990. *Collected Works, Volume II Publications 1938-1974.* S. Feferman et al.(eds.), Oxford（Oxford University Press）

Gödel,K. 1995. *Collected Works, Volume III Unpublished Essays and Lectures.* S. Feferman et al.(eds.), Oxford（Oxford University Press）

Hacking,I. 2014. *Why Is There Philosophy of Mathematics At All?* Cambridge （Cambridge University Press）／イアン・ハッキング『数学はなぜ哲学の問題になるのか』金子洋之・大西琢朗訳、森北出版（2017）

Hilbert,D. 1900. Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem Internationalen Mathematikerkongress zu Paris, References to [Hilbert,1935],290-338

Hilbert,D.1922. Neubegründung der Mathematik, *Abhandlüngen mathematischen Seminar Universität Hamburg* 1, References to [Hilbert,1935], 157-77

Hilbert,D. 1935. *Gesammelte Abhandlungen* vol.3, Berlin（Springer）

ヒューストン＝エドワーズ,K.2019「数学は発明か発見か」編集部訳、『日経サイエンス』2019 年 12 月号、35-40

渕野昌 2007「構成的集合と公理論的集合入門」、[田中一之，2007]所収、29-148

市川浩 1993『＜身＞の構造　—身体論を超えて』講談社学術文庫（初版は青土社（1984））

飯田隆（編）1995『リーディングス数学の哲学　ゲーデル以後』勁草書房

Irvine, A.D. ed., 2009. *Philosophy of Mathematics*. Amsterdam・Boston・Heidelberg・London・New York・Oxford・Paris・San Diego・San Francisco・Singapore・Sydney・Tokyo（Elsevier），

伊藤俊太郎 1990『ギリシア人の数学』講談社学術文庫

ジャキント,M.2007『確かさを求めて　数学の基礎についての哲学論考』田中一之監訳、培風館

Kanamori,A. 2009. Set Theory from Cantor to Cohen, in [Irvine,2009],395-459

カッツ,V.J.2005『数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳、共立出版

木岡伸夫 2007『風景の論理　沈黙から語りへ』世界思想社

Klev,A.M.2017. Dedekind's logicism, *Philosophia Mathematica*,25,341-368

近藤洋逸 2008『新幾何学思想史』ちくま学芸文庫（初版は三一書房（1966））

Lavers,G.2019. Hitting a moving target：Gödel,Carnap, and mathematics as logical syntax, *Philosophia Mathematica*,27,219-243

リヴィオ,M.2017『神は数学者か？　数学の不可思議な歴史』千葉敏生訳、ハヤカワ文庫

Maddy,P.　1988. Believing the axioms. Ⅰ, *The Journal of Symbolic Logic,*53, 481-511

マオール,E.2019.『不思議な数 e の物語』伊理由美訳、ちくま学芸文庫

丸山圭三郎 1991『カオスモスの運動』講談社学術文庫

McDowell,J. 1994. *Mind and World*. Cambridge・Massachusetts・London (Harvard University Press)／『心と世界』神崎繁・川田健太郎・荒畑靖宏・村月忠康訳、勁草書房 2012

野家啓一 2005『物語の哲学』岩波現代文庫

小野寺嘉孝 2000『なっとくする複素関数』講談社

Pascal,B. 1991. *De l'esprit géométrique,* in J.Mesnard(ed.), *Œuvres complétes III* Paris(Desclée de Brouwer,1991),360-428

Peacock G. 1840-1845 *A Treatise on Algebra* 2 vols. (Reprinted from the 1842-1845 edition, New York(Scripta Mathematica,1940))

Putnam,H. 2002. *The Collapse of the Fact/Value Dichotomy and other Essays*. Cambridge・Massachusetts・London(Harvard University Press)

Quine,W.V.O. 1951. Two dogmas of empiricism, *Philosophical Review,*60,20-43, References to [Quine,1953],20-46

Quine,W.V.O. 1953. *From a Logical Point of View*. Cambridge・Massachusetts・London(Harvard University Press)

Reck,E.H. 2003. Dedekind's structuralism：an interpretation and partial defense, *Synthese*,137,369-419

Reck,E.H. 2013. Frege,Dedekind,and the origins of logicism, *History and Philosophy of Logic,*34,242-265

Resnik,M.D.1995. Scientific vs. mathematical realism：the indispensability argument, *Philosophia Mathematica*,3,166-174

Resnik,M.D. 2005. Quine and the Web of Belief, in [Shapiro,2005b], 412-436

Resnik,M.D. 2018. Non-ontological structuralism, *Philosophia Mathematica*, 27,303-315

Riemann,B. 1854. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. References to [Riemann,1990],272-287

Riemann,B. 1990. *Gesammelte mathematische Werke,Wissenscaftlicher Nachlass und Nachträge*. H.Weber and R.Dedekind(eds.),Berlin (Springer/Teubner)

斎藤正彦 2002『数学の基礎　集合・数・位相』東京大学出版会

Schlimm,D. 2013. Axioms in mathematical practice, *Philosophia Mathematica*, 21,37-92

Shapiro S. 1991. *Foundations Without Foundationalism：A Case for Second-Order logic.* Oxford（Oxford University Press）

Shapiro S.2000. *Thinking About Mathematics*. Oxford（Oxford University Press）

Shapiro,S. 2005a. Categories,structures, and the Frege-Hilbert Cotroversy, *Philosophia Mathematica*,13,61-77

Shapiro,S. ed., 2005b. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford・New York(Oxford University Press)

Sieg,W. Schlimm,D.2005. Dedekind's analysis of number：systems and axioms, *Synthese*,147,121-170

示野信一 2012『複素数とはなにか』ブルーバックス

田中一之・鈴木登志雄 2003『数学のロジックと集合論』培風館

田中一之（編）2007『ゲーデルと 20 世紀の論理学　④集合論とプラトニズム』東京大学出版会、

寺澤順 2013『現代集合論の探検』日本評論社

戸田山和久 2007「ゲーデルのプラトニズムと数学的直観」、[田中一之，2007]所収、227-293

Wagner,R. 2010.The natures of numbers in and around Bombelli's *L'algebra*, *Archive for History of Exact Sciences,*64, 485-523.

ツェルメロ,E.2013「集合論の基礎に関する研究Ⅰ」渕野昌訳、[デデキント，2013]所収、139-179