哲学 40 号（2022）

数学における唯名論への反論

有安和人

序

「2 は素数である」という文は何を語っているのだろうか。標準的な意味論であれば、数詞「2」は単称語であり、「2」は何らかの対象を指示していることになる。しかし、唯名論の立場では、「2」が何らかの対象を指示することを否定する。唯名論にも様々な立場があるが、本稿で取り上げるのは、Hofweber の「限定詞説」と Field の「虚構主義（fictionalism）」である[1]。これら二つを取り上げる理由は、両者が標準的な意味論に対する問題提起であるからである。限定詞説では、数詞「2」が単称語であることを否定する。このことによって、数詞「2」が対象を指示することを否定する。虚構主義は、数詞「2」が単称語であることを認めたうえで、「2 は素数である」という文は架空の物語の一部であると主張し、数詞「2」の対象が存在することを否定する。

本稿は以下の手順で唯名論に反論する。①Hofweber の「限定詞説」（1 章）。②Field の「虚構主義」（2 章）。③「数学的対象を定義する仕方が複数ある」という問題（3 章）。④数学の中の発見（4 章）。⑤正当化の方法（5 章）。⑥発明（6 章）。以上から、以下の結論を導く。唯名論では、数学の中の様々な行為が説明できない。数学には発見があり、長い探求の結果、数学的対象の新しい性質が発見される。唯名論では、数学に発見があるという事実が説明困難であり、数学的対象の存在は認めねばならない。数学の真理は蓋然的真理であり、数学的対象の存在も蓋然的真理である。しかし、その蓋然的真理とは、我々の生命を委ねることができるだけの確実性を持っている。

1. Hofweber の限定詞説

1.1 限定詞説の説明

[1] Hofweber は自説に名称をつけていない。「限定詞説」という名称は私が勝手につけたものである。

Hofweber は、数詞「2」は「単称語」ではなく、「限定詞（determiner）」であると主張する。例えば、「2+2＝4」とは、「二つの石と二つの石とを合わせると、四つの石となる」というような文から名詞（石）を省略した文を表示するという（2016：161）。Hofweber の根拠は以下のように要約できる。

「2+2＝4」は、英語では次のように二通りで表現される。

Two and two are four. （1.1）

Two and two is four. （1.2）

小学校の算数では、子供は（1.1）の形式で数詞の学習を開始する。そして、数が大きくなると、（1.2）に移行する。つまり最初は、石や積み木のような具体的な物体を用いて学習する。数が大きくなると、数多くの石を表象することが困難であるため、数を表す語を単称語にして、（1.2）の形式での学習に移行する（2016：129-148）。ここから、Hofweber は次のように結論する。

> 数詞は非指示である。その意味は、数詞が指示することを目ざしているのではなく、指示とは別のことをしているということである。ここでの説明では、数詞は限定詞であって、様々な理由で単称語の位置に現れているのである（2016：148）。

日本語では、動詞に単複の区別が現れないため、（1.1）と（1.2）とに対応する文がない。しかし、日本の算数教育においても、（1.1）の形で学習は導入される。即ち、「二つの石と二つの石とを合わせると、四つの石となる」といった、具体的な物体を用いて学習が導入される[2]。

ところで Hofweber は、以上の議論は「算術に特有のことで、よって数学全般には議論が引き継がれない」と注意を促している（2016：177）。Hofweber がいうところの「算術」とは、「自然数を扱う数学的学問」である（2016：4）。よって、Hofweber の「算術」は計算問題だけではなく、数論も含む。自然数を扱っていれば、「無限に多くの素数が存在する」（2016：150）というような文も「算術」に属する。私は、「無限に多くの素数が存在する」のような文は数論に属する文として、計算式文から区別して、Hofweber の限定詞説に反論したい。

[2] 日本の小学 1 年生の教科書では、まず 10 までの数詞を学習し、次に「何番目」と数えることを学習する。例えば、犬が 6 匹並んでいて、「前から 3 匹」、「前から 3 番目」といった具合に数えることを学習する（『しょうがくさんすう 1 年上』: 1〜10）。

1.2　限定詞説の問題点

Hofweber がいうように、通時的にも共時的にも、数詞は限定詞として導入されたし、導入されるだろう。即ち、人類が数を導入した時も、おそらく限定詞として導入されたであろう。また、我々が数を学習するときも、限定詞として学習を始めるであろう。しかし、数学理論のすべての文において、数詞「2」が限定詞であるとはいえない。少なくとも、数論の文において「2」が用いられる場合、「2」は指示を行っており、数学者は対象について語っている。

私の論点は二点である。①人類が数を導入した時も、我々が数を学習するときも、数詞は限定詞として学習される。この意味では、Hofweber の限定詞説は正しい。②しかし、計算式の次元と数論の次元とを区別すると、両者では数詞の使用法が異なり、数論の次元では限定詞説が成立しない。数詞の役割が、計算式と数論とでは異なる。数論の文中では、数詞は対象を指示するものとして使用されている。

まず、①から説明する。イフラによると、有史以来最古の数字はシュメール文字とエラム文字で（前 3200～3000 年頃）、これらの文書の目的は種々多様な商品の数量を会計簿につけることだった（イフラ，1988：123-124）。

> シュメール人とエラム人は、…旺盛な経済活動が生む多様な要求を満たすために、数量計算の結果や財産目録を小さくておおむね長方形の小さな粘土板に記録する習慣を、前 3 千年紀初頭から身につけていたのである。（イフラ：124）

粘土板上の会計方式より古い会計方式は、小石や土片で数を示すものであった（前 3300 年頃）。例えば、細い棒状の石は第一位の位の 1 単位を、球は第 2 の位の 1 単位を、円盤は第 3 の位の 1 単位を意味するといった具合である。数を表すこの物体は、しばしばカルクリ（calcli）と呼ばれ、ラテン語の calculus の語源である（イフラ：124-125）。

以上は人類が数字を発明した様子であった。数字が会計の必要から発明されたとすれば、数式を人類が用い始めた頃も、数字は限定詞として用いられたであろう。したがって、この点で Hofweber の限定詞説は正しい。

次に②の説明をする。先の引用文において、Hofweber は「数詞が指示することを目ざしているのではなく、指示とは別のことをしている」と語っていた。Hofweber の論点は、文法において単称語でも、指示語としては用いられていないということにある。Hacking が指摘している通り、Hofweber の議論は Wittgenstein の思想の延長線上にあるといえる（Hacking，2014：249；邦訳 317）。Wittgenstein は次のことを語っていた。

「意味（Bedeutung)」という語を使う場合、すべての場合ではないにしても多くの場合は次のように説明できる。語の意味とは、言語内でのその使用である。(『哲学探究』§43；Wittgenstein，1953：20）

Hacking は、この Wittgenstein の格言を改作して、「表示を問うてはならない、使用を問え」と主張する（2014：249；邦訳 317)。この標語に Hofweber の議論は合致する。

その「使用を問え」という観点において、限定詞説には問題がある。計算式の次元と数論の次元とを区別すると、数論の次元では限定詞説は成立しない。その根拠は二つである。第一に、限定詞説では数学の言語行為が説明困難である。数論は数について論ずるのであるから、数詞は対象を指示し、その対象の性質について数論の文は語っている。古代ギリシア数学の時代から、数論では数を偶数・奇数・素数・平方数・完全数といった種類に分類し、数がどのように生成されるかを論じてきた。例えば平方数「1，4，9，16，…」の数列は、どの数も奇数の数列「3，5，7，…」の数を加えることによって前の数から生まれる（カッツ，2005：194)。このように、数論は数を論ずるのであるから、数詞は対象を指示するものとして使用されている。

第二に、現代数学では集合が全数学の基礎であり、集合で数や関数を定義する。集合で定義するということは、数や関数は対象であるということである。実際、数学者の齋藤は「数学的対象の集まりを一つの対象とみて、これらを集合という」（齋藤：1）と述べ、集合によって関数を定義し（齋藤：10)、自然数・整数・実数を集合によって定義してゆく（齋藤：第 2 章)。数が何らかの「集まり」でなければ、なぜ集合で定義しようとするのか。集合で定義するという行為は、「数・点・関数」が対象であるということである。よって、限定詞説は数学の言語行為と合致しない。

数論では、数を集合で定義する。そして、加減乗除の演算は写像によって定義される。

定義　X を集合とする。X×X から X への写像を X 上の二項演算または単に演算という。X の元 x，y に対して決まる X の元 f(x，y)を、x+y とかくとき、この演算を加法と言い、xy とかくとき、この演算を乗法という。(齋藤：35)

演算は写像によって定義され、写像は集合によって定義される。よって、数論学習後は「2+2＝4」のような計算式でも、「2」は対象を指示するといえる。つまり、数論においては、「2+2＝4」のような計算式でも、「2」は対象を指示するといえる。

以上の議論をまとめよう。計算式の次元と数論の次元とを区別すると、両者では数詞の使用法が異なり、数論の次元では限定詞説は成立しない。その理由は二つである。第一に、数論は数について論ずるのであるから、数詞は対象を指示していると解釈するのが自然である。第二に、限定詞説は数学の言語行為と合致しない。

しかし、限定詞説には傾聴に値する点がある。人類が数を導入した時も、我々が数を学習するときも、数は限定詞で導入される。この点で限定詞説は正しい。しかし、人類が数論に移行したとき、そして我々が数論を学習したとき、数は対象になるといえる。

2. Field の虚構主義

2.1 Field の虚構主義の説明

数学の対象を定義する仕方は複数ある場合が多い。Field は、この定義の恣意性が虚構主義の根拠になるという（Field ， 1989：22）[3]。例えば現代数学では、自然数は集合によって定義される。しかし、定義の仕方は複数ある[4]。

$$\{\varnothing\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ ,\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\ ,\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\ ,\cdots \qquad (2.1)$$

$$\{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\{\{\varnothing\}\}\},\ \cdots \qquad (2.2)$$

（2.1）は、数 x の次の数を「x と x のすべての要素とからなる集合」と考える。

（2.2）は、数 x の次の数を「その要素が x である集合」と考える。現代数学では、集合論は全数学の基礎である。しかし、Field は集合を基本的対象と考えるのも恣意的だという。というのも、集合を関数で定義することも可能であるからである（1989：21)。Field は、これらの恣意性を最も自然に説明できるのは虚構主義だという。「2+2＝4」であるのは、数学という物語がそういっているからである。それは小説と同様である。即ち、「シャーロック・ホームズが探偵である」のは、物語がそういっているからである（1989：3)。自然数の定義が複数あるのは、(2.1）でも自然数の物語は作れるし、(2.2）でも自然数の物語は作れるからである（数学的対象を定義する仕方が複数あるという問題は後で論ずる)。

---

[3] Azzouni は、この定義の恣意性を、数学的対象が数学者に存在論的に依存することの根拠とみなしている（2004：60)。

[4] 自然数の定義の例については、Benacerraf（1965：278）を参考にした。

2.2　Field 虚構主義の問題点

虚構主義に対しては、次の四つの反論が可能である[5]。第一に、Bueno と Zalta が主張していることだが、虚構主義も含めて唯名論では、数学のしていることを理解することが困難になる。唯名論では、数学の文を文字通りに受け取ることはできず、これらの文を書き換えねばならない。数学的対象の存在を認めることを避けるため、唯名論的に容認可能な仕方で再解釈して書き換えねばならない（Bueno and Zalta，2005 : 294）。実際、Field は次のことを語っている[6]。

> 虚構主義者は次のように言うことができる。「2+2＝4」が真であるのは、「オリヴァー・トゥイスト（Oliver Twist）はロンドンで暮らしていた」ということが真であるのと全く同じ意味である。後者がそうであるのは、よく知られた物語によって真であるという意味においてのみである。前者が真であるのは、標準的な数学によって真であるということにおいてのみである。同様に、虚構主義者が 2+2＝4 を信じるのは、標準的数学が 2+2＝4 と言っている（或いは標準的数学の帰結である）と信じているという意味においてのみである。このことは次のことと同様である。オリヴァー・トゥイストがロンドンで暮らしていると我々のほとんどが信じるのは、オリヴァー・トゥイストがロンドンで暮らしていると、その小説が言っている、または小説の帰結であると我々が信じているという意味においてのみである（Field，1989 : 3）。

Field の言っていることは次のように要約できる。虚構主義の場合、文（2.3）を（2.4）の文に書き換えねばならない、もしくは読み換えねばならない。

「2+2＝4」は真である。　　(2.3)

[5] Field の論点は、数学なしでも自然科学はやっていけるということにある（1989 : 6）。Field は、数学的対象の存在に対する唯一の重大な論証は不可欠論証であるという（2016 : 5）。そこで Field は、ニュートンの重力理論を数学なしで展開して見せた。Field の虚構主義に対しては既に Shapiro（2000 : 227-237）、Resnik（1997 : 53-59）の批判がある。本稿では、これらとは異なる角度から反論する。不可欠論証とは、自然科学の展開には数学が不可欠であり、自然科学に対する確証は数学に対する確証となるという主張である。私は、「数学的対象の存在に対する唯一の重大な論証は不可欠論証である」とは考えない。基本的に、数学は数学内で正当化されると考える。このことが、Field の「数学なしでも科学はやっていける」という主張を取り上げない理由でもある。不可欠論証については、Resnik（1995）を参考。

[6] 以下の引用文で「オリヴァー・トゥイスト」とは、Dickens の同名の小説の主人公。

「2+2＝4」は標準的数学がそう言っているから真である。　　　(2.4)

Bueno と Zalta が批判するのは、いちいち書き換えることが不自然であるということである。

虚構主義に対する第二の反論は、前述したように、現代数学では、集合で数や関数を定義する。集合で定義するということは、数や関数が対象であるということである。

虚構主義に対する第三の反論は、小説と数学の質的な相違である。数学は、常に新しい文が作られて、その文の真偽はほぼすべて決まる。小説の場合、著者以外の他者が新しい文を作ることはない。数学の場合、極めて多くの人が新しい文を作り、また原理的にはすべての人が新しい文を作ることができ、その文の真偽はほぼ決まる。もちろん、真偽の決まらない数学の文もある。例えば「自然数の濃度（可算濃度）$\aleph_0$ と実数の濃度（連続体の濃度）$\aleph$との間にある濃度は存在するのか」という連続体仮説（continuum hypothesis）のように、真偽の決まらない文もある[7]。しかし、このような確定しない文の存在も、小説のような虚構と数学との質的相違である。虚構であれば、どんな文に対しても、肯定か否定かのどちらかを決めて物語を作れば良い。数学には、そのような自由はない。

虚構主義に対する第四の反論は、数学には発見があるという事実である。小説の中の存在者、例えばオリヴァー・トゥイストという登場人物の場合、小説で書かれた内容以外の性質が新しく発見されることはない。登場人物の隠れた性質があって、その性質が新しく発見されるということはない。それに対し数学では、それまで知られていなかった新しい事柄や性質が発見されるし、発見され続けるのである。例えば、虚数は 16 世紀に導入された。18 世紀になって、次の（2.5）式のように、虚数と正弦関数・余弦関数とが結びつくこと、(2.6）式のように（xにπを代入することで)、虚数とπとが結びつくことが発見された[8]。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (2.5)$$

$$e^{i\pi} = -1 \qquad (2.6)$$

また、5 次以上の次数を持つ方程式の代数的解法を求める問題のように、300 年ほど要して解決される問題もある。方程式の代数的解法を求める問題は、ルネサンスから追求が始まり、アーベルが 5 次以上の方程式には代数的解法が存在しないことを証明した（1826 年)。

---

7 カントルは、濃度が$\aleph_0$のすぐ次の濃度が$\aleph$であると予想し、連続体仮説と呼ばれる。
8 カッツ（2005：631)、示野（2012：170-171)、ダンハム（2012：126-130）を参考。

数学には発見がある。発見という点では、現実に存在する物体と同様である。新しい性質が発見されるという事実は、対象の存在を認めなければ説明困難である。数学には発見があるという事実は、虚構と数学との決定的な違いの証左である。数学には発見があり、発見が終わることはない。このことは、虚構と数学との決定的な違いであり、限定詞説と虚構主義を含めた唯名論への決定的な打撃となる。

3. 対象の不完全性

ここでは、「数学的対象を定義する仕方が複数ある」という問題を取り上げる[9]。Putnam は次のことを語っている。

> 要約すると、すべてを「スコーレム化する」ことができる。いかなる語も（自然的でない心の力なしには）指示を固定することは絶対的に不可能であるように見える。（Putnam，1980：476）[10]

Putnam の言っていることを説明すると、次のようになる。レーベンハイム・スコーレムの下降定理によれば、「言語 L における無矛盾な理論は、L の濃度以下もしくは高々可算のモデルを持つ」（田中，2019：69）。「可算のモデルを持つ」とは、自然数と同じ無限数個のモデルが存在するということである。つまり、無矛盾な言語であれば、どんな言語でも複数のモデルがあるということが数学的に証明されているのである。自然数や実数の定義が複数あることは、レーベンハイム・スコーレムの定理によって保証されているのである。そして、このレーベンハイム・スコーレムの定理は言語一般に拡張可能である。よって、Quine がいうように、数学だけでなく、すべての対象に不完全性は適用されるのである。

> 私は指示の不可測性という学説を対象一般に拡張する。というのも、すべての対象は理論的対象だからである。…（中略）。対象、或いは変項の値とは、その時々の目盛り

9 「数学的対象を定義する仕方が複数ある」という問題を、Resnik は数学的対象の不完全性（incompleteness）と呼んでいる（Resnik，1997：88-89）。一つの定義に確定しないという意味で、「不確定性」という用語の方が適切であると私には思えるが、先人の用法を踏襲する。

10 「自然的でない心の力なしには」という Putnam の補足の意味は、真理を直観するというような心の能力を仮定し、その能力によって一つのモデルを選出して真であると断定するのでなければ、指示は不確定であるということである。

として役立つにすぎない。文と文との構造が保存されれば、それらの目盛りを変化させても良いし、取り替えても良い。（Quine，1981：20）

二つの存在論の間に 1 対 1 の関係をつけることができる限り、一方の存在論に対し他方の存在論を支持する根拠は存在しえない。構造を守りなさい。そうすればすべてを守ることになる。（Quine，1992：8）

以上の議論からの結論は次のとおりである。対象の不完全性から対象が「虚構である」と結論するなら、数学だけでなく、自然科学の対象も日常経験の対象も「虚構である」と結論せねばならない。自然科学の対象や日常経験の対象の存在を認めるなら、数学の対象の存在も認めるべきである。

4. 数学の中の発見

Schiffer は、現実世界に存在するものと虚構との相違について次のことを語っている。

虚構的存在者・性質・命題といった「言語的措定物」と、言語的措定物ではない存在者、即ち言語的・概念的実践から最高度に独立している存在者との間には、次のような重要な相違がある。後者の本質は、ア・ポステリオリな科学の探求によって発見される。それに対して前者の本質は、そのような仕方では発見されえない。（Schiffer，1996：161）

私は、数学は後者に属する、即ち「ア・ポステリオリな探求によって数学の諸性質が発見される」と主張したい。その根拠は二つである。第一に、「ア・ポステリオリ」には「経験に由来する認識」という認識論的観点の意味と、「結果から探求する」という方法論的観点の意味とがある[11]。「結果から探求する」という方法論的観点からいえば、数学には確かに結果の探求が存在し、結果を探求することによって数学的対象の新しい諸性質が発見される。第二に、この「結果から探求する」という方法が用いる正当化の方法は、自然科学の実験や観測による正当化と類似している。

[11] Lalande,A.（1988 I ：73-74）を参考。なお、「ア・ポステリオリ」の意味を認識論的観点に限局するのは経験主義のドグマと思われる。

第一の根拠から説明する。ド・モルガンは、虚数の説明において、次の内容を述べている。方程式 $x^2=-1$ は不合理である。しかし、代数学者は、「$\sqrt{-1}$ 」という記号を発明し（解を $x=\sqrt{-1}$ とみなす)、演算規則に従って、この記号を用いた[12]。この方法は実験的（experimental）な使用と呼べる。このように述べた後、次のことを語っている。

> 虚数記号を使用した実験においては、なぜかわからないが、(結果が生じたときは)実験の明瞭な結果が常に真であった、もしくは証明可能であった。(De Morgan, 1849 : 41)

虚数が導入されたのは 16 世紀である。前述したように、虚数と正弦関数・余弦関数との関係が発見されたのは 18 世紀である。200 年にもわたって虚数という仮説の結果を探求し、正弦関数・余弦関数との関係という虚数の新しい性質が発見されたといえるだろう。「結果から探求する」という方法は、古代ギリシアの数学者パッポス（290-330 頃）によって「解析の方法」と呼ばれた方法と同類である[13]。

第二の根拠を説明する。2 章の（2.5）式で説明したオイラーの公式は、虚数という仮説に対する正当化となる。この正当化は、自然科学において仮説を観測によって正当化するのと類似している。自然対数の底eや三角関数は端的な事実である。これらと虚数との関係を示すオイラーの公式は、虚数という仮説と事実との合致を示す。詳しく説明しよう。

オイラーは、$j=\frac{x}{w}$とおいて、a^x をニュートンの二項定理を用いて展開し、wを無限に小さい数とすることによって、(4.1）式を導いた[14]。

$$a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{2\cdot1}+\frac{k^3x^3}{3\cdot2\cdot1}+\frac{k^4x^4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+\cdots \tag{4.1}$$

ここで、$x=k=1$ を（4.1）に代入すると、(4.2）になる。

---

12 虚数記号は最初、「$\sqrt{-1}$ 」のように、負数と根号の合成によって表記された。しかし、この表記だと、i×2 i＝－2 が、$\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)\times(-4)}=\sqrt{4}=2$ となってしまうため、「i」という記号が導入された。実際オイラーは、この間違いを犯している (Euler , 1840 : 43)。「i」という記号は、オイラーが死の直前 1777 年に用い、ガウスによって広められた(ボイヤーⅣ : 78)。

13 「解析の方法」については Hintikka and Remes（1974）を参考。

14 以下はダンハム（2012 : 42-43）を参考にしている。

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2\cdot1} + \frac{1}{3\cdot2\cdot2} + \frac{1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} + \cdots \qquad (4.2)$$

この数についてオイラーは近似計算を行って、その数をeとした。

$$e = 2.718281828\cdots \qquad (4.3)$$

eという数自体は単なる無理数である。三角関数は、天体観測のために古代ギリシア数学において考案された、三角形の角と辺の関係を表す式である。よって、eも三角関数も、何かの仮定から導かれたものではなく、端的な事実である。これらと虚数とのつながりを示すオイラーの公式は、虚数に対する事実による正当化といえる。この正当化は、自然科学の仮説が観測事実によって正当化されるのと類似している。

またオイラーは、余弦の級数展開と正弦の級数展開から、三角関数についての公式が複素数の範囲でも成立することを証明している（ダンハム，2012：130-132）[15]。

$$sin^2(a+bi) + cos^2(a+bi) = sin^2 a + cos^2 a = 1 \qquad (4.4)$$

このように虚数という仮説に対して、事実を積み重ねていったのである。即ち、虚数という仮説に対し、既に真だとわかっている数学的事実との合致を積み重ねていったのである。このような正当化は、自然科学の仮説が観測事実を積み重ねることと類似である。

もう一つ具体例を挙げる。非ユークリッド幾何の発見は、自然科学の仮説が実験によって反証されるのと同類である。非ユークリッド幾何は、ユークリッド幾何の平行線の公準を証明する試みから誕生した。証明の試みは古代ギリシア数学の時代から行われていた。17 世紀になって、この公準を否定して矛盾を導き出そうとする試みが行われた。その試みの中から、18 世紀になって非ユークリッド幾何が誕生した。即ち、直線上にない 1 点を通る平行線が複数引けると仮定しても一つの（非ユークリッド）幾何ができるし、平行線が存在しないと仮定しても一つの（非ユークリッド）幾何ができる。この事例では、最初の目標は平行線公準の証明だった。しかし、証明できないという反対のことが発見され、そのことが既存の平行線概念を変革し、新しい理論（非ユークリッド幾何）を形成する結果となった[16]。この事例

[15] 余弦の級数展開と正弦の級数展開については、5 章で説明する。
[16] 似たような事例として、5 次或いはそれ以上の次数を持つ方程式の代数的解法を探求

は、物理学における実験と同類の現象といえる。即ち、或る仮説が実験によって反証され、その結果、理論の一部が改訂されるのと同類である[17]。

以上のことをまとめよう。数学には確かに結果の探求が存在し、結果を探求することによって数学的対象の新しい諸性質が発見される。この「結果から探求する」という方法の正当化は、自然科学の実験や観測による正当化と類似している。我々は世界の中を生きている。世界を我々は知り尽くすことはできない。今もわからないことがあり、今後も様々な発見があるであろう。数学も同様で、数学を知り尽くすことはできないし、今後も様々な発見があるであろう。発見のいくつかは、数学的対象の新しい性質についての発見である。数学的対象の存在がなければ、新しい性質の発見はない。数学において発見があるという事実は、数学的対象の存在に対する強力な根拠となる。

5. 数学の正当化は多様である

「ア・ポステリオリな探求によって数学の諸性質が発見される」という主張に対して、次のような反論がなされるかもしれない。即ち、数学の発見は「演繹主義（deductivism）」もしくは「もしならば主義（if-then-ism）」で説明できる、という反論である[18]。例えば Putnam は、何らかの定理が証明されたとしても、そこから数学的対象の存在は結論されないと主張する。即ち、「数学はそれ自体に特有の対象を持たない。単に何から何が帰結するかを語っているだけである。」（Putnam, 1967 : 300）[19]

或いは Azzouni は、「措定を伴う数学的基体（subject）は、一連の公理を単に書き留めることによって無から創造される」（2004 : 127）とし、「数学の抽象体（abstracta）は、虚構のものと全く同じ仕方で、我々の言語活動に存在論的に依存している」（2004 : 103）と主張する。Azzouni の主張は次のようにいうことができる。数学は公理を設定し、そこから帰結を導出しているだけである。数学的対象は我々の言語活動に存在論的に依存しており、虚構と同様である。

し、結果、5 次以上の方程式には代数的解法が存在しないことが証明されたというものもある。この事例も、16 世紀から 19 世紀にわたる 300 年にも及ぶ実験と解釈できる。

17 非ユークリッド幾何の創始者の一人であるガウスは、実際に測量して現実の物理空間にどの幾何が妥当するか決定しようとした（近藤, 2008 : 107-109）。ガウスの行為は、まさにア・ポステリオリな探求といえる。

18 「演繹主義」もしくは「もしならば主義」については Shapiro（2000 : 148-157）を参考にしている。

19 訳は邦訳（281）を参考にして、一部改変した。

以上の解釈には問題がある。その理由は次の二点である。第一に、公理化は何らかの理論を後から再構成するものである。よって、数学は公理から単に帰結を導出しているだけではない。Putnam や Azzouni の描く数学は、教科書上の数学であって、歴史の中の数学ではない。現実の数学における行為は多様である。教科書では、最初に公理が設定され、そこから様々な定理が導出される。しかし、歴史の中の数学では、様々な手法が用いられ、多くの数学的帰結は公理を前提することなく導かれる[20]。第二に、多くの数学的帰結は端的な事実によって正当化される。以下、その具体例を挙げる。

公理化は、古くは古代ギリシアの幾何学で起こったが、数学全体で公理化が行われたのは 19 世紀末以降である。例えば、今日ツェルメロ-フレンケルの集合論と呼ばれる公理系が導入されたのは 1930 年である。その 30 年以上前にカントルは集合論の様々な発見を行っている。

カントルは、自然数全体の集合 N と整数全体の集合 Z とが同じ濃度である（同じ個数の要素からなる）ことや、N と有理数全体の集合 Q とが同じ濃度であることを証明した[21]。しかし、N と実数全体の集合 R とは濃度が異なることも証明した。カントルは、二つの集合 X と Y とが同じ濃度であることを、X と Y の間に 1 対 1 の関係がつけられることであるとした（Cantor，1883：884)。カントルの証明において根拠となったのは、「1 対 1 の関係をつけることで数える」とういう濃度の概念である。この濃度の概念は、我々の日常の事実に基づく。例えば、小学校の運動会で行われる玉入れ競技を考えてみよう。赤組と白組のどちらの籠の中に多くの玉が入っているかを数えるために、同時に玉を一つずつ取り出して数える。即ち、1 対 1 に対応させて数える[22]。何らかの個数を数えるとき、我々は 1 対 1 の対応づけを行う。つまり、濃度の概念は日常の事実に基づく。よって、カントルの一連の証明は、事実による正当化といえる。もちろん、濃度による集合の類別は、集合全体の集合を考えることになり、ラッセルのパラドクスを生むことになる。しかし、自然数・整数・有理数・実数の濃度に関する証明に話を限れば、それらは事実によって正当化されるといえる。カントルのしたことは、「公理を設定して、それらからの帰結を単に導出する」のとは明らかに異なる。カントルの数学的帰結は、端的な事実によって正当化されるといえる。

---

[20] Brown は「数学的真理の立証には多くの異なる仕方がある」（Brown，2008：207）といい、次のような方法を挙げている。①証明（演繹的導出）、②直観、③帰納、④仮説演繹法（帰結が真であることによる正当化）、⑤図、⑥対角線化による証明（ゲーデルの不完全性証明など)。⑦思考実験。（2008：206）

[21] 集合論については、寺澤（2013）を参考にしている。

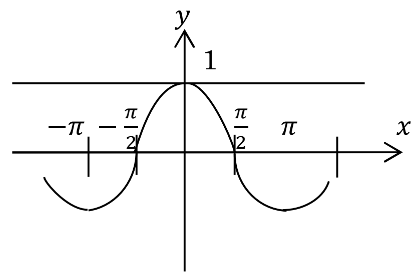
[22] この事例は寺澤（2013：31）を参考にした。

もう一つ具体例を挙げる。オイラーは、ド・モアブルの定理「$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) \pm i\sin(n\theta)$」を使用して、正弦関数と余弦関数とを級数展開した（ダンハム，2012：124-125）。

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots \tag{5.1}$$

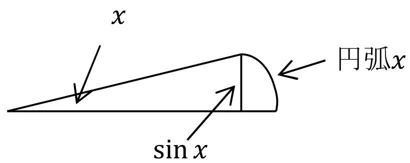
$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots \tag{5.2}$$

この証明においてオイラーが用いたのは、「$\theta = \frac{x}{n}$」として、n を無限大にしたとき、「$\cos\theta \fallingdotseq 1$」、「$\sin\theta \fallingdotseq \theta$」、「$\frac{\sin\theta}{\theta} \fallingdotseq 1$」とみなすという「近似」である。この近似は図 5.1 と 5.2 のような図形の事実からの推測である。この図形上の事実にオイラーの証明は基づいている。よって、オイラーの証明は事実による正当化であるといえる。



$y = \cos x$
$x = 0$ の近くで $y = 1$ となる。
$\cos x \fallingdotseq 1$

図 5.1



中心角xが小さいとき、半径 1 の円弧の長さxと$\sin x$とがほぼ等しいとみなす。（円弧＝$2\pi \times 1 \times \frac{x}{2\pi} = x$）
$\sin x \fallingdotseq x$

図 5.2

以上の議論をまとめよう。数学における正当化の方法は多様である。数学は、単に公理から帰結を導出して終わりではない。多くの数学的帰結は、何らかの仮定を前提することなく、端的な事実によって正当化されている。また、虚数の場合のように、仮説演繹法と同類の方法も用いられる。数学には、実験的探求と呼ぶことができるようなア・ポステリオリな探求（結果の探求）が存在し、結果を探求するこ

とによって数学的対象の新しい諸性質が発見される[23]。その発見は、何らかの公理によって正当化されるのではなく、端的な事実によって正当化される。

6. 数学の中の発明

数学には発見だけではなく、発明もある。例えば、負数や虚数は発明といえるだろう。古代ギリシアにおいて、数とは自然数のことであった。16 世紀以降、負数や虚数といった新しい数が導入された[24]。また自然数でさえも、「つくられたもの」といえるかもしれない。例えば、オーストラリアの原住民は、数詞としては「1」と「2」のみで、3 を「2 と 1」で、4 を「2 と 2」で表し、5 以上の数は「たくさん」と呼ぶ（イフラ：12)。Hofweber がいうように、自然数が限定詞から派生したとするなら、つまり数える行為から自然数が派生したとするなら、数える行為は有限であるから、或る有限数以上の数は「つくられたもの」といえるだろう。

Resnik は、数学的対象は「措定される（posit)」という（Resnik ，1997：188)。

> また我々の知的生活において、数学には虚構とは異なる役割がある。数学は虚構とは異なり、我々の科学的探求において（明らかに）除去不可能な場所を占めている。よって、新しい数学的対象を措定する理由は、虚構の新しい登場人物を創造する理由とは全く異なるのである。…（中略)。通常、数学的対象は、明確な数学的必要性に応えて措定される。例えば、それまでの数学が未決定のままにしていた問いに答えることを可能にするとか、或いはそれまでの結果全体を拡張することを可能にするとかいったものである。また、数学的措定には根拠を探す。虚構の登場人物の創造に対しては根拠を探さない。(Resnik ，1997：189）

Resnik の論点は、数学的対象は数学の中の必要性から発明されるということである。この論点を拡張して、私は次のように主張する。数学の起源は我々の生活にあ

[23] Azzouni は「存在しない事物は性質を持たない」（2004：57）と主張する。この基準からすると、数学的対象は性質を持つのであるから、そして新しい性質が発見されるのであるから、数学的対象は存在することになる。

[24] 負数の最古の記録は、中国で紀元前 250 年頃、インドで 7 世紀頃に存在する(ボイヤーⅡ：114-115,143)。ヨーロッパの最古の記録は、15 世紀にある(ボイヤーⅢ：17-18)。「+・－」の記号は最初、倉庫の荷の過不足を示すために使われていたものが、演算の足し算・引き算に使われるようになった。しかし、ヨーロッパにおいて負数は、数としてはなかなか認められなかった。例えば 16 世紀のほとんどの人々は、方程式の解に負数を認めなかった(カッツ：402)。

る。そこからやがて、数学内での数学上の必要性から数学的対象は発明されるようになる。発明された対象は、既存の数学との整合性（既知の定理との合致や既知の対象との関連性の発見など）という審判を経て承認される。よって、現代の抽象的な数学も、起源を遡れば、我々の生活と極めて緩くだが関係する。我々は世界の中で生活し、その中で数学という行為も存在する。以下、以上の主張を説明する。

我々は世界の中で生活し、その中で数学も含めた科学的活動をする。その科学的活動の中で、数学的対象を発明する。数は、例えば牛や羊を数えるという生活の必要性から発明された。直線や三角形といった幾何学的対象は、建築や測量といった生活の必要性から発明された。初期の数学的対象の出自は生活にあったのである。

数学的対象は「抽象的対象」と呼ばれる。例えば、幾何学の点は広がりを持たないし、幾何学の直線には幅がない。我々が机の上で作図した点には広がりがあるし、作図した線には幅がある。ピュタゴラス以前の古代数学では、点にも直線にも広がりがあると考えられていた。だから無理数が発見されたのである。正方形の一辺と対角線とが自然数の比で表されると思っていたら、表されないことが発見されたのである[25]。無理数の発見は、数・点・直線についての既存の数学的概念の矛盾をあらわにした。そして、点・直線の概念は、ユークリッド『原論』の定義に見られるような、「広がりのない点」・「幅のない直線」という新しい概念へと改訂された。そして数の概念は、そこからおおよそ 2000 年の年月を経て、有理数と無理数とを含んだ実数概念へと拡張された。

以上の議論をまとめよう。初期の数学的対象の出自は生活にあった。数学が発展するにつれ、数学内での発見により、既存の数学的概念の矛盾が明らかになり、それらの諸概念は改訂された。つまり、数学内で問題が生じ、数学上の必要性から諸概念が改訂された。

また、前述した虚数の発明のように、数学をさらに発展させるために、実験的に新しい数学的対象が発明されることもある。つまり、数学上の必要性から、新しい数学的対象が発明された。数学が発展するにつれ、数学内の理由で、諸概念の改訂と対象の発明とが起こる。

さて、数学的対象が発明されるからといって、数学的対象が「虚構」であるという結論は導かれない。先に引用した Schiffer の言葉を思い出してほしい。Schiffer は、言語的措定物ではない存在者を「言語的・概念的実践から最高度に独立した存在者」と呼んでいた。つまり、日常経験の対象のような物体も、言語・概念を離れては存在しえないと Schiffer は主張している。Schiffer はその理由を述べていない

---

[25] 非通約性は最初、五角形の 1 辺とその対角線との間に発見されたという説もある。伊東（1990：165-168)、サボー (1978)を参考。

が、理由は概念である。Quine が指摘しているように、概念は人工であるからである。

> クラスや数の概念（notion）は言うまでもなく、ネコの概念でさえも、人工である。生得的な素因と文化的な伝統に根差した人工である。（1992：6）[26]

Quine と Schiffer の思想をさらに展開して、私は次のように主張したい。科学（数学を含む）の概念は、概念どうしが緊密に関係している。これらの概念形成には、個人の自由はほとんどない。そういう意味で、「言語的・概念的実践から最高度に独立している」のである。だから、これらの概念を用いた文において、間主観的に真偽が問えるし、新しい発見があるのである。

数学も自然科学と同様、「言語的・概念的実践」から完全に独立ではない。自然科学には仮定（仮説）という手続きがあり、実験・観測といった方法で正当化される。数学にも仮定がある。例えば、虚数や射影幾何学の無限遠点のような対象の発明、そして公理の設定である[27]。そして前述したように、数学の正当化の方法は多様である。よって、自然科学が蓋然的真理であるのと同様、数学も蓋然的真理である。その意味で、自然科学と数学とは一枚岩である。

数学は蓋然的真理であるから、数学的対象の存在も蓋然的真理である。日常経験の対象も自然科学の対象も、そして数学の対象も、蓋然的に確証される存在である。しかし、数学を含む科学の蓋然性とは、我々の生命を委ねることができるだけの確実性を持っている。例えば、数学的に計算された予測に基づいて、外科手術などの医療処置を我々は受けるのである。

7. 結語

本稿では、Hofweber の「限定詞説」と Field の「虚構主義」とを取り上げた。これらの唯名論には次の七つの問題がある。

---

[26] Quine は、自然科学理論の概念に concept を用い、それ以外の概念に notion を用いている。「自然主義では、「何が存在するのか」の説明と「存在するものが何をするのか」の説明のために、可謬ではあるが、自然科学のみを参照する。科学は、必然的に人工の言語で表現された人工の概念（concept）において、危険を冒して試験的に答えようとする。我々には、それ以上に良いものを要求できない。」（1992：9）

[27] 公理に関しては、Schlimm（2013）を参考にしている。

① 計算式と数論とでは文の次元が異なる。数論の文中では、数詞は対象を指示するものとして使用される。
② 現代数学では、集合論が全数学の基礎であり、集合を用いて諸々の数学的対象を定義する。数学的対象の存在を認めない唯名論では、この「基礎づけ」という数学の行為が説明困難である。即ち、何らかの「集まり」でなければ、集合で定義することができない。
③ 小説のような虚構は静的であるのに対し、数学は動的である。数学では常に新しい文が作られ、その文の真偽はほぼすべて決まる。（数学と虚構との質的な相違）
④ 数学で新しい文が作られたとき、その真偽が決まらない場合もある。即ち、未解決の状態が続く数学的問題もある。虚構であれば、どんな文に対しても、肯定か否定かのどちらかを決めて物語を作ればよいが、数学にはそのような自由がない。（数学と虚構との質的な相違）
⑤ 数学においては発見がある。発見のいくつかは、数学的対象の新しい性質の発見である。これらの発見は、数学的対象の存在を認めなければ説明困難である。
⑥ 数学は、単に公理を設定して、そこから何が帰結するかを語っているのではない。公理化は理論を後から再構成するものである。
⑦ 数学の正当化の方法は多様である。多くの数学的帰結は事実によって正当化される。

以上七点からの結論は次のようになる。唯名論では数学を説明できない。数学的対象の存在は認めるべきである。

数学には発見だけではなく、発明もある。しかし、「数学において発明がある」という事実は、数学が虚構であるということの根拠にはならない。概念は人工である。概念は改訂されうる。すべての知識は可謬であり、自然科学も数学も可謬である。自然科学も数学も蓋然的真理である。よって、数学的対象の存在も蓋然的真理である。しかし、数学的真理を正当化する仕方は多様であり、それらの多様な確証が我々の生命も支えうるような確実性を保証している。

我々は世界の中を生きる。この世界の中で、日常経験の対象と出会い、自然科学の対象と出会い、数学の対象とも出会う。我々は数学の外に立つことはできない。数学を知り尽くすことはできないし、今後も様々な発見があるであろう。数学における様々な行為の中で、我々は数学の対象と出会う。数学の対象と出会うから、しかも偶然に出会うから、前もって結末がわかっていないから、数学は面白いのである。

文献

Azzouni,J.（2004）*Deflating Existential Consquence： A Case for Nominalism*. New York（Oxford University Press）

Benacerraf,P.（1965）What numbers could not be, *Philosophical Review*,74. References to [Benacerraf and Putnam,1983[2]]：272-294.

Benacerraf,P.（1973）Mathematical truth, *Journal of Philosophy*,70. References to [Benacerraf and Putnam,1983[2]]：403-420.／ベナセラフ，P.「数学的真理」飯田隆訳、[飯田隆（編），1995]所収：245-272

Benacerraf,P. Putnam,H. eds.,（1983[2]） *Philosophy of Mathematics：selected readings*. Cambridge（Cambridge University Press）

ボイヤー，C.B.（1983-4）『数学の歴史　Ⅰ-Ⅴ』加賀美鐵雄・浦野由有訳、朝倉書店

Brown,J.R.（2008[2]）*Philosophy of Mathematics. A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*. London（Routledge）

Buehler,D.（2014）Incomplete understanding of complex numbers Girolamo Cardan：a case study in acquisition of mathematical concepts. *Synthese,*191：4231-4252.

Bueno,O. and Zalta,E.N.（2005）A nominalist's dilemma and its solution. *Philosophia Mathematica,13*：294-307

Cantor,G.（1883）*Foundations of a general theory of manifolds：a mathematico-philosophical investigation into the theory of the infinite*. References to [Ewald, 1996Ⅱ]：878-920

De Morgan,A.（1849）*Trigonometry and Double Algebra*, London

ダンハム，W.（2012）『オイラー入門』黒川重信・若山正人・百ヶ谷哲也訳、丸善出版（初版はシュプリンガー・ジャパン 2004 年）

Euler,L.（1840）*Elements of Algebra*, tr. J.Hewlett, New York（Springer-Verlag）

Ewald,W.B. 1996. *From Kant to Hilbert：A source book in the foundations of mathematics*,2vol., New York（Oxford University Press）

Field,H.（2016[2]）*Science without Numbers：A defense of nominalism*. Oxford（Oxford University Press）

Field,H.（1989）*Realism, Mathematics and Modality*. Oxford（Blackwell）

Hacking,I.（2014） *Why Is There Philosophy of Mathematics At All?* Cambridge（Cambridge University Press）／イアン・ハッキング『数学はなぜ哲学の問題になるのか』金子洋之・大西琢朗訳、森北出版（2017）

Hintikka,J. and Remes, U.（1974） *The Method of Analysis：Its Geometrical Origin and Its General Significance*. Dordrecht・Boston（Reidel）

Hofweber,T.（2005）Number determiners, numbers, and arithmetic. *The Philosophical Review*, 114：179-225

Hofweber,T.（2016）*Ontology and the Ambitions of Metaphysics*. Oxford（Oxford University Press）

イフラ，G.（1988）『数学の歴史　人類は数をどのようにかぞえてきたか』松原秀一・彌永昌吉監修、平凡社

飯田隆（編）（1995）『リーディングス数学の哲学　ゲーデル以後』勁草書房

伊東俊太郎（1990）『ギリシア人の数学』講談社学術文庫

カッツ，V.J.（2005）『数学の歴史』上野建爾・三浦伸夫監訳、共立出版

近藤洋逸（2008）『新幾何学思想史』ちくま学芸文庫(初版は三一書房 1966 年)

Lalande,A.（1988[6]） *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* Ⅰ-Ⅱ. Paris（Presses Universitaires de France）

Moltmann,F.（2013）*Abstract Objects and the Semantics of Natural Language*. Oxford（Oxford University Press）

Putnam,H.（1967）Mathematics without foundations. *Journal of Philosophy*, 64, References to [Benacerraf and Putnam,1983[2]]：295-311.／パトナム，H.「基礎づけのいらない数学」戸田山和久訳、[飯田隆（編），1995]所収：273-299

Putnam,H.（1980）Models and reality. *The Journal of Symbolic Logic,*45：464-482

Quine,W.V.O.（1981） *Theories and Things.* Cambridge,Mass（Harvard University Press）

Quine,W.V.O.（1992）Structure and nature. *Journal of Philosophy*, 59, 5-9

Resnik,M.D.（1995）Scientific vs. mathematical realism：the indispensability argument, *Philosophia Mathematica*,3：166-174

Resnik,M.D.（1997）*Mathematics as a Science of Patterns.* Oxford（Oxford University Press）

齊藤正彦（2002）『数学の基礎　集合・数・位相』東京大学出版会

サボー，A.『ギリシア数学の始源』中村・中村・村田訳、玉川大学出版(1978)

Schiffer,S.（1996）Language-created and language-independent entities. *Philosophical Topics*,24(1)：149-167

Schlimm,D.（2013） Axioms in mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 21：37-92
Searle,J.R.（1979）*Expression and Meaning. Studies in the Theory of Speech Acts.* Cambridge（Cambridge University Press）
Shapiro S.（2000） *Thinking About Mathematics*. Oxford（Oxford University Press）
Shapiro,S. ed.（2005） *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford (Oxford University Press)
島内剛一（1971）『数学の基礎』日本評論社
示野信一(2012)『複素数とはなにか』ブルーバックス
田中一之（2019）『数学基礎論序説－数の体系への論理的アプローチ－』裳華房
寺澤順（2013）『現代集合論の探検』日本評論社
Wagner,R. （2010）The natures of numbers in and around Bombelli's *L'algebra*, *Archive for History of Exact Sciences,*64：485-523.
Wittgenstein,L.（1953）*Philosophical Investigations*. New York（New York MacMillan Publishing Co.）
『しょうがくさんすう 1 年上』（2020）日本文教出版
『小学算数 3 年上』（2020）日本文教出版